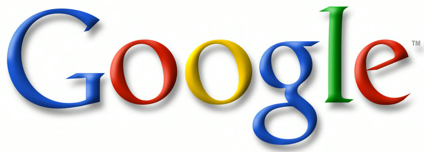
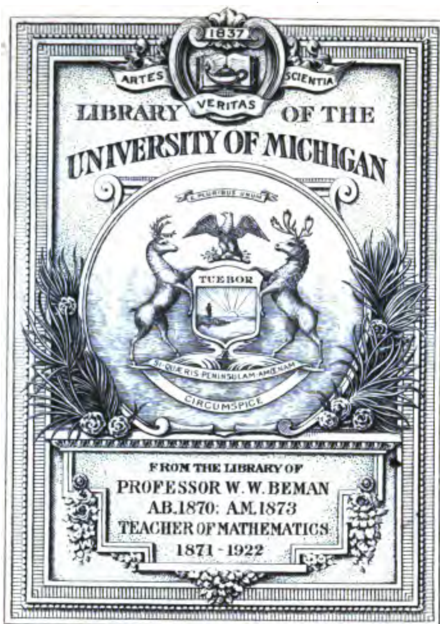




BAUMHAUER … …b an land-
wirtschaft… …ie. *Zweite*
Auflage. … *M.* 1.85. —
II. Teil … der land-
wirtschaf… (VIII u.
78 S.) …

BONGAERTZ … berechnung
für Präp… und Mittel-
schulen. … …b. *M.* 1.50.

BRUGIER, G … …rzgefafster
Poetik. … …en u. einem
Glossar. … …n Halbfranz
M. 7.40; … — Daraus
apart: K… …. 1.

CAESARIS, … recensuit et
verborum… *Gitlbauer*
Pars … …b. *M.* 1.50.
Pars … …eb. *M.* 1.50.

CORNELII … …m indicem
addidit … *M.* 1; geb.
M. 1.30.

FECHT, Dr. … Mit einem
alphabet… …b. *M.* 1.50.
— **Griechisc…** …eb. *M.* 1.85.

FOX, W., S. … …ulgebrauch
bearbeit… …3 S.) 40 *Pf.*

FUSS, K., und G. **HENSOLD, Lehrbuch der Physik** für den Unterricht an Lehrerbildungsanstalten und Mittelschulen. Mit vielen Übungsaufgaben und 331 Abbildungen, gr. 8⁰. (XII u. 458 S.) *M.* 4.50; geb. *M.* 4.95.

GEISTBECK, Dr. M., **Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie** für Mittelschulen u. Lehrerbildungs-Anstalten. *Dreizehnte Auflage,* mit vielen Illustrationen. gr. 8⁰. (VIII u. 166 S.) *M.* 1.50; geb. *M.* 1.85.

GIETMANN, G., S. J., **Die Aussprache des Englischen** in systematischer Vollständigkeit, einschliefslich der Regeln über Quantität und Accent. 8⁰. (IV u. 108 S.) *M.* 1.50.

HENSE, Dr. J., **Deutsches Lesebuch** für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Auswahl deutscher Poesie und Prosa mit litterarhistorischen Übersichten und Darstellungen. gr. 8⁰. **I. Teil: Dichtung des Mittelalters.** *Zweite Auflage.* (XII u. 218 S.) *M.* 1.60; geb. *M.* 2.05. — **II. Teil: Dichtung der Neuzeit.** *Zweite Auflage.* (XII u. 438 S.) *M.* 3.20; geb. *M.* 3.70. — **III. Teil: Beschreibende und lehrende Prosa.** (VIII u. 532 S.) *M.* 3.60; geb. *M.* 4.20.

HRIBAR, E., **Elemente der ebenen Trigonometrie.** Zum Schulgebrauch und zum Selbststudium dargestellt. Mit 44 Abbildungen. gr. 8⁰. (VIII u. 100 S.) *M.* 1.20; geb. *M.* 1.50.

KELLNER, Dr. L., **Deutsches Lese- und Bildungsbuch** für **höhere** Schulen, insbesondere für die oberen Klassen katholischer Töchterschulen und weiblicher Erziehungsanstalten. *Zwölfte Auflage.* Mit einem Stahlstich und einem Lichtdruck. gr. 8⁰. (XVI u. 408 S.) *M.* 3.20; geb. *M.* 3.70.

— **Lesebuch für Mittel- und Oberklassen** gehobener Mädchenschulen als Vorstufe seines deutschen Lese- und Bildungsbuches. *Elfte Auflage.* 8⁰. (XII u. 506 S.) *M.* 2; geb. *M.* 2.35.

KRASS, Dr. M., und Dr. H. **LANDOIS, Lehrbuch für den Unterricht in der Naturbeschreibung.** Für Gymnasien, Realgymnasien und andere höhere Lehranstalten bearbeitet. gr. 8⁰. **I. Teil: Lehrbuch der Zoologie.** Mit 219 Abbildungen. *Dritte Auflage.* (XVI u. 340 S.) *M.* 3.30; geb. *M.* 3.70. — **II. Teil: Lehrbuch der Botanik.** Mit 268 Abbildungen. *Dritte Aufl.* (XVI u. 292 S.) *M.* 3; geb. *M.* 3.40. — **III. Teil: Lehrbuch der Mineralogie.** Mit 108 Abbildungen u. 3 Tafeln Krystallformennetze. (X u. 128 S.) *M.* 1.60; geb. *M.* 1.95.

Anfangsgründe

der

Arithmetik und Algebra.

Anfangsgründe

der

Arithmetik und Algebra

für höhere Lehranstalten.

Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet

von

Maria Johann Gerhard

Karl Schwering, 1846 —

Direktor des stiftischen Gymnasiums in Düren.



Freiburg im Breisgau.

Herdersche Verlagshandlung.

1893.

Zweigniederlassungen in *Strafsburg, München* und *St. Louis,* Mo.

Wien I, Wollzeile 33: B. Herder, Verlag.

W. W. Beman
gt.
6-25-1923

Buchdruckerei der Herderschen Verlagshandlung in Freiburg.

Vorwort.

Vorliegende Darstellung der Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra eröffnet eine Reihe von mir seit Jahren geplanter Schulbücher. Die Ausarbeitung schliefst sich nach Inhalt und Form den neuen Lehrvorschriften an. Darum sind nicht nur manche früher in Obersekunda und Prima behandelte Abschnitte wie Kombinatorik, Kettenbrüche, unbestimmte Gleichungen u. s. w. weggefallen, sondern es fehlt auch die Lehre von den Verhältnisgleichungen. Dieselbe kann thatsächlich nur als Hülfswissenschaft der Ähnlichkeitslehre in der Geometrie eine besondere Darstellung beanspruchen. Ebenso ist die Lehre von der Division mehrgliedriger Ausdrücke den allgemeinen Sätzen über Gleichungen untergeordnet und damit ganz ans Ende gerückt. Überhaupt sind schwierigere Fragen, welche beim Aufgabenlösen gelegentlich auftauchen, aber durch die Lehrvorschriften nicht ausdrückliche Erwähnung finden, in die beiden Schlufsparagraphen verwiesen. Andere Schwierigkeiten, welche beim ersten Lehrvortrage übergangen werden müssen oder für eine ausgiebigere Behandlung sich nicht eignen, sind durch Kleindruck gekennzeichnet. Es mag besonders betont werden, dafs in der Lehre von den Potenzen und Wurzeln unter Ausscheidung alles überflüssigen Lernstoffes nur wissenschaftlich und praktisch wichtige Erscheinungen zur Behandlung gelangt sind. Von Künsteleien, wie von negativen und gebrochenen Wurzelexponenten, hat der Verfasser ganz abgesehen. Solche Dinge kommen dem Fachmathematiker nicht unter die Augen und werden daher auch Primanern ohne Nachteil unbekannt bleiben dürfen. Dagegen sah es der Verfasser

als seine besondere Aufgabe an, im Sinne der neuen Lehrvorschriften den übrigen Lehrstoff zu vertiefen und für zweckmäſsige Übungen den Boden zu bereiten.

An einigen Stellen glaubt der Verfasser auch sachlich Neues geboten zu haben. Doch ist bei einem Schulbuche die Darstellung allgemein bekannter Dinge selbstverständlich in so überwiegender Weise die Hauptsache, daſs die Art derselben allein über Wert oder Unwert eines solchen Buches entscheidet.

Der Verfasser war bemüht, wissenschaftliche Strenge mit Klarheit zu verbinden. Dieses Ziel ist aber beim Jugendunterrichte nicht durch grundlegenden strenggegliederten Lehraufbau, sondern nur durch allmählichen Fortschritt an der Hand vielfacher und nachhaltiger Übung zu erreichen. Keine Rechnung ohne Probe, kein Satz ohne Zahlenbeispiel. Denn wie in der Physik und Chemie der Versuch, so ist in der Zahlenlehre die Rechnungsthatsache entweder Bestätigung einer alten oder Quelle einer neuen Wahrheit. Das sind unverbrüchlich feststehende Grundsätze für jeden, der sich mit rechnender Mathematik beschäftigt, und zwar in gleichem Maſse, wenn gleich in verschiedener Weise geltend für Schüler und Meister.

Düren, im Mai 1893.

Der Verfasser.

Inhalt.

Vorwort v

Erster Lehrgang.

§ 1. Vorbegriffe 1
§ 2. Darstellung der Zahlen 3
§ 3. Buchstabenrechnung. Einleitung 5
§ 4. Beweis der Multiplikationsgesetze für ganze positive Zahlen . 7
§ 5. Übungen 9
§ 6. Gleichungen. Andere Rechnungsarten 11
§ 7. Die Subtraktion 13
§ 8. Übungen 15
§ 9. Division 16
§ 10. Decimalbrüche 21
§ 11. Gleichungen mit einer Unbekannten 24

Zweiter Lehrgang.

§ 12. Die negativen Zahlen 27
§ 13. Übungen 30
§ 14. Gleichungen mit mehreren Unbekannten 31
§ 15. Potenzen und Wurzeln 36
§ 16. Gleichungen zweiten Grades 41
§ 17. Logarithmen 47
§ 18. Logarithmische Sätze 49

Dritter Lehrgang.

§ 19. Potenzen und Wurzeln. Logarithmen 51
§ 20. Gleichungen höhern Grades mit mehreren Unbekannten . . 56
§ 21. Die arithmetischen Reihen 58
§ 22. Geometrische Reihen 60
§ 23. Anwendung auf Zinseszinsrechnung 63
§ 24. Die Lehre von den imaginären Gröſsen 65
§ 25. Der binomische Lehrsatz 68
§ 26. Gleichungen höhern Grades 71
§ 27. Einige Sätze über Teilbarkeit der Zahlen 77

Erster Lehrgang.

§ 1. Vorbegriffe.

Addieren heifst zusammenzählen. Addierte Zahlen heifsen Summanden.

Multiplizieren heifst eine Zahl, nämlich den Multiplikandus, so oft zählen, als eine zweite Zahl, der Multiplikator, anzeigt.

Bezüglich der Multiplikation können vier Gesetze aufgestellt werden. Das erste derselben lautet:

Multiplikator und Multiplikandus können miteinander vertauscht werden, ohne dafs das Ergebnis der Multiplikation sich ändert.

Man nennt daher Multiplikator und Multiplikandus mit gemeinsamem Namen Faktoren. Das Ergebnis der Multiplikation heifst Produkt.

Bisher war nur von zwei Faktoren die Rede. Multipliziert man eine Zahl mit einer zweiten, hierauf das gewonnene Produkt mit einer dritten Zahl, hierauf das neu entstandene Produkt mit einer vierten Zahl, so nennt man das Endergebnis ein Produkt aus vier Faktoren.

Die Richtigkeit dieser Benennung beruht auf dem Umstande, dafs es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge man aus den vier Faktoren das Produkt bildet. Z. B. die Faktoren 2, 4, 3, 5 geben:

1) $2 \cdot 4 = 8; \quad 8 \cdot 3 = 24; \quad 24 \cdot 5 = 120.$

2) $4 \cdot 5 = 20; \quad 20 \cdot 3 = 60; \quad 60 \cdot 2 = 120.$

Es ist $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

und ebenso $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$

Ähnlich kann man aus drei, fünf, sechs, sieben u. s. w. Faktoren Produkte bilden. Die Reihenfolge der Multiplikationen ist

ganz gleichgültig, stets wird dasselbe Produkt erhalten. Aber man kann noch weiter gehen und bemerken, dafs es auch gestattet ist, beliebige Faktoren zu Unterprodukten zu vereinigen. So ist es z. B. bei dem aus sechs Faktoren gebildeten Produkte

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Vereinigen wir den ersten und sechsten Faktor zu einem Unterprodukte $2 \cdot 7 = 14$; dann den zweiten und fünften zu dem Unterprodukte $3 \cdot 6 = 18$; endlich den dritten und vierten $4 \cdot 5 = 20$. Nun bilden wir aus diesen drei Unterprodukten als Faktoren das Hauptprodukt, so wird übereinstimmend mit obigem Ergebnisse

$$14 \cdot 18 \cdot 20 = 5040.$$

So erhalten wir ein neues (das dritte) Multiplikationsgesetz:

Bei der Ausführung der Multiplikation ist man berechtigt, beliebige Faktoren zu Unterprodukten zu vereinigen.

Ein Produkt aus gleichen Faktoren heifst Potenz. Der gleiche Faktor heifst Grundzahl. Diejenige Zahl, welche angiebt, wievielmal dabei die Grundzahl als Faktor gesetzt werden soll, heifst Exponent. Man schreibt Potenzen folgendermafsen:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$; $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$; $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

2^4 spricht man „2 hoch 4"; 5^3 spricht man „5 hoch 3" u. s. w.

Anmerkung. Man achte darauf, die Exponenten immer in viel kleinerer Schrift als die Grundzahlen zu schreiben. Das Zeichen = spricht man „gleich" oder „ist gleich". a^2 spricht man auch „a Quadrat".

Eine Gleichung ist die Verknüpfung zweier Zahlengröfsen durch das Zeichen =, das Gleichheitszeichen.

Man überzeuge sich von der Richtigkeit folgender Gleichungen:

$1 = 1$	$2 = 2$	$3 = 3$	$4 = 2^2$	$5 = 5$
$6 = 2 \cdot 3$	$7 = 7$	$8 = 2^3$	$9 = 3^2$	$10 = 2 \cdot 5$
$11 = 11$	$12 = 2^2 \cdot 3$	$13 = 13$	$14 = 2 \cdot 7$	$15 = 3 \cdot 5$
$16 = 2^4$	$17 = 17$	$18 = 2 \cdot 3^2$	$19 = 19$	$20 = 2^2 \cdot 5$
$21 = 3 \cdot 7$	$22 = 2 \cdot 11$	$23 = 23$	$24 = 2^3 \cdot 3$	$25 = 5^2$
$26 = 2 \cdot 13$	$27 = 3^3$	$28 = 2^2 \cdot 7$	$29 = 29$	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
$31 = 31$	$32 = 2^5$	$33 = 3 \cdot 11$	$34 = 2 \cdot 17$	$35 = 5 \cdot 7$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$	$37 = 37$	$38 = 2 \cdot 19$	$39 = 3 \cdot 13$	$40 = 2^3 \cdot 5$
$41 = 41$	$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$	$43 = 43$	$44 = 2^2 \cdot 11$	$45 = 3^2 \cdot 5$
$46 = 2 \cdot 23$	$47 = 47$	$48 = 2^4 \cdot 3$	$49 = 7^2$	$50 = 2 \cdot 5^2$

$51 = 3 \cdot 17$	$52 = 2^2 \cdot 13$	$53 = 53$	$54 = 2 \cdot 3^3$	$55 = 5 \cdot 11$
$56 = 2^3 \cdot 7$	$57 = 3 \cdot 19$	$58 = 2 \cdot 29$	$59 = 59$	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$61 = 61$	$62 = 2 \cdot 31$	$63 = 3^2 \cdot 7$	$64 = 2^6$	$65 = 5 \cdot 13$
$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$	$67 = 67$	$68 = 2^2 \cdot 17$	$69 = 3 \cdot 23$	$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
$71 = 71$	$72 = 2^3 \cdot 3^2$	$73 = 73$	$74 = 2 \cdot 37$	$75 = 3 \cdot 5^2$
$76 = 2^2 . 19$	$77 = 7 \cdot 11$	$78 = 2 \cdot 3 . 13$	$79 = 79$	$80 = 2^4 \cdot 5$
$81 = 3^4$	$82 = 2 \cdot 41$	$83 = 83$	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$	$85 = 5 \cdot 17$
$86 = 2 \cdot 43$	$87 = 3 \cdot 29$	$88 = 2^3 \cdot 11$	$89 = 89$	$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$91 = 7 \cdot 13$	$92 = 2^2 \cdot 23$	$93 = 3 \cdot 31$	$94 = 2 \cdot 47$	$95 = 5 \cdot 19$
$96 = 2^5 \cdot 3$	$97 = 97$	$98 = 2 \cdot 7^2$	$99 = 3^2 \cdot 11$	$100 = 2^2 \cdot 5^2$

Die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 u. s. w. sind unzerlegbar. Man nennt sie Primzahlen.

Wenn man jedes Glied einer Summe mit einer Zahl multipliziert und die gewonnenen Produkte addiert, so erhält man dasselbe Ergebnis, als wenn man die Summe mit derselben Zahl multipliziert. (Zweites Multiplikationsgesetz.)

So hat man die Summe:

$$3 + 4 + 5 + 7 + 3 = 22.$$

Multipliziert man jeden Summanden mit 4 und addiert die gewonnenen Produkte, so mufs dasselbe herauskommen, als wenn man die Summe 22 mit 4 multipliziert. In der That ist:

$$12 + 16 + 20 + 28 + 12 = 88.$$

Um anzudeuten, dafs eine Summe mit einer Zahl multipliziert werden soll, bedient man sich der Klammern. Der Ausdruck

$$4\,(3 + 4 + 5 + 7 + 3),$$

bei welchem auch noch der Multiplikationspunkt weggelassen wird, hat also den Sinn: „Man addiere 3, 4, 5, 7, 3 und multipliziere das, was herauskommt, mit 4.“ Ebenso würde das Zeichen $2\,(3 \cdot 5)$ den Sinn haben: „Man multipliziere 3 mit 5 und multipliziere das Ergebnis mit 2.“ Nach dem dritten Multiplikationsgesetze ist

$$2\,(3 \cdot 5) = 3\,(2 \cdot 5) = 5\,(2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

§ 2. Darstellung der Zahlen.

Man überzeuge sich von der Richtigkeit der Gleichungen:

$$53 = 5 . 10 + 3;$$
$$432 = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2;$$
$$5\,693 = 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 3;$$
$$10\,406 = 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 6.$$

Man überzeugt sich durch Bildung anderer Beispiele von der Wahrheit, dafs jede ganze Zahl dargestellt werden kann durch

Addition von Summanden, deren jeder ein Produkt aus einer Potenz von 10 und einer der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ist. Natürlich braucht man diejenigen Summanden, welche mit einem Faktor 0 behaftet sind, nicht aufzuschreiben; denn:

Ist ein Faktor eines Produktes null, so ist auch das Produkt null, und ist ein Produkt null, so ist mindestens ein Faktor null. (Viertes Multiplikationsgesetz.)

Daher hätte man auch schreiben dürfen:

$$10\,406 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 6.$$

Auch kann man immer 1 als Faktor weglassen, und so hätten wir mit gleichem Rechte schreiben dürfen:

$$10\,406 = 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 6.$$

Dennoch gewährt die obige ausführliche Schreibweise einen gewissen Vorteil. Denn wir sind durch dieselbe in den Stand gesetzt, eine beliebige fünfstellige Zahl durch die allgemeine Form wiederzugeben:

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4.$$

In unserem Beispiele war

$$a = 6,\ b = 0,\ c = 4,\ d = 0,\ e = 1.$$

Für die Zahl 53 362 würde sein:

$$a = 2,\ b = 6,\ c = 3,\ d = 3,\ e = 5.$$

Ja selbst die Anfangsbeispiele fügen sich dieser Form.

So ist für 53 $a = 3,\ b = 5,\ c = d = e = 0$

und für 432 $a = 2,\ b = 3,\ c = 4,\ d = e = 0.$

Es ist nun leicht, die allgemeine Form einer siebenstelligen, achtstelligen u. s. w. Zahl anzugeben. Man merke:

10^3 = tausend, 10^6 = Million, 10^{12} = Billion, 10^{18} = Trillion, 10^{24} = Quadrillion, 10^{30} = Quintillion u. s. w.

Für 10^9 = tausend Millionen wird auch wohl der Ausdruck Milliarde gebraucht. In der Arithmetik wird dieses Wort nicht angewendet, denn es ist überflüssig und erschwert das Lesen grofser Zahlen.

Eine ganz andere Art der Darstellung von Zahlen gewinnen wir durch die Betrachtung ihrer Primfaktoren, Es ist $12 = 2^2 \cdot 3$ und $45 = 3^2 \cdot 5$. Man kann daher sagen, die allgemeine Form der Zahlen 12 und 45 sei $a^2 b$, wo a und b irgend welche Primzahlen bedeuten. Im ersten Hundert tritt diese Form auf bei 12, 18, 20, 28, 44, 45, 50, 52, 63, 68, 75, 76, 92, 98, 99. So ist für $a^2 b = 75$ $a = 5$, $b = 3$. Andere Formen sind a^2, a^4, $a^4 b$, $a^3 b^2 c$ u. s. w. Es läfst sich zeigen, dafs jede Zahl in die Form

$a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ... treten kann, wo a, b, c ... Primzahlen (ausgeschlossen 1) α, β, γ ... beliebige Zahlen bedeuten. Der Lernende stelle die verschiedenen Formen auf, welche die Zahlen des ersten Hundert darbieten und bestimme, wie oft jede dieser Formen auftritt. — Zahlen von der Form a sind die Primzahlen selbst. Die Form $a^3 b^2$ tritt nur einmal auf bei der Zahl 72. Die nächst gröfsere Zahl dieser Form würde 108 sein für $a = 3$, $b = 2$; die darauf folgende 200 für $a = 2$, $b = 5$.

Aufgaben ergeben sich hieraus in reicher Menge. Man schreibe auf alle Zahlen des ersten Tausend von der Form a^2, a^3, a^4 u. s. w.; $a^2 b^2$, $a^3 b^3$, $a^2 b^5$ u. s. w.; $a^2 b c$, $a^3 b c$ u. s. w.; $a b c d$; a^α.

Anmerkung. Der Anfänger hat bei diesen Übungen länger zu verweilen. Er gewinnt durch dieselben den Begriff der allgemeinen Gröfse.

Bei der Wiederholung kann auch die Darstellung:

$$N = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + \dots$$

der Zahl N betrachtet werden. a ist dabei irgend eine Zahl und a_0, a_1, a_2 ... sind Zahlen kleiner als a.

§ 3. Buchstabenrechnung. Einleitung.

Wir betrachten die Gleichung

$$(2x + 3)(5x + 4) = 10x^2 + 23x + 12.$$

Dieselbe heifst in Worten: „Man denke sich eine beliebige Zahl. Diese gedachte Zahl multipliziere man mit 2 und addiere zum Produkte 3. Dann hat man den ersten Faktor des linker Hand stehenden Produktes. Nun multiplizieren wir die gedachte Zahl mit 5 und addieren zum Produkte 4 hinzu. So erhalten wir den zweiten Faktor desselben Produktes. Dieses Produkt ist nun gleich dem Werte, den die 10fache zweite Potenz der gedachten Zahl, das 23fache der gedachten Zahl und 12 zusammengezählt ergeben."

Denken wir uns z. B. 5 als x. Dann ist der erste Faktor des Produktes $2x + 3 = 13$, der andere $5x + 4 = 29$. Das Produkt ist also 377. Das 10fache des Quadrates von 5 ist 250, das 23fache von 5 ist 115, dazu 12 addiert giebt:

$$13 \cdot 29 = 250 + 115 + 12.$$

Weitere Proben sind:

$$\begin{array}{llllll} x = 0; & 3 \cdot 4 = & 10 \cdot 0^2 & + 23 \cdot 0 & + 12; & \\ x = 1; & 5 \cdot 9 = & 10 & + 23 & + 12 = & 45; \\ x = 2; & 7 \cdot 14 = & 40 & + 46 & + 12 = & 98; \\ x = 3; & 9 \cdot 19 = & 90 & + 69 & + 12 = & 171; \\ x = 4; & 11 \cdot 24 = & 160 & + 92 & + 12 = & 264. \end{array}$$

Selbst wenn wir x gleich einem Bruche setzen, bleibt die Gleichung richtig. So wird für $x = \frac{2}{3}$

$$\frac{13}{3} \cdot \frac{22}{3} = \frac{40}{9} + \frac{46}{3} + 12 = \frac{286}{9}.$$

Nach diesen Proben zweifeln wir nicht mehr daran, dafs unsere Gleichung richtig ist. Aber von einem Beweise derselben sind wir noch weit entfernt. Es ist ja denkbar, dafs dieselbe hundert Proben bestände, aber bei der folgenden sich als unrichtig erwiese. Wir wollen uns daher klar zu machen suchen, wie man obige Gleichung erhalten hat, um so vielleicht zur Einsicht in ihre allgemeine Richtigkeit zu gelangen. Zu diesem Zwecke betrachten wir nachstehende Rechnung:

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ 5x + 4 \\ \hline 10x^2 + 15x \qquad \\ 8x + 12 \\ \hline 10x^2 + 23x + 12 \end{array}$$

Wir gewahren dabei grofse Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Zahlenmultiplikation. Ferner sehen wir, dafs jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des andern multipliziert ist. Dann ist $2x \cdot 5x$ unter Anwendung des dritten Multiplikationsgesetzes gebildet worden; die Faktoren 2 und 5 sind zu dem Unterprodukte 10, die Faktoren $x \cdot x$ zu dem Unterprodukte x^2 vereinigt worden. Endlich haben wir unter Beachtung des zweiten Multiplikationsgesetzes $23x = (15 + 8)\,x = 15x + 8x$ gesetzt.

Wir erkennen hieraus mit hinreichender Klarheit, dafs wir die Multiplikationsgesetze zu betrachten haben, um Einsicht in die Richtigkeit der obigen Gleichung zu gewinnen. Ehe wir dazu übergehen, wollen wir noch einige Beispiele nach den aufgestellten Regeln berechnen und Zahlenproben anstellen:

$$\begin{aligned} (x + 4)(x + 1) &= x^2 + 5x + 4; \\ (x + 2)(3x + 1) &= 3x^2 + 7x + 2; \\ (5x + 3)(5x + 7) &= 25x^2 + 50x + 21; \\ 12x(3x + 1) &= 36x^2 + 12x; \\ (7x + 4)(3x + 0) &= 21x^2 + 12x; \\ (8x + 9)(9x + 8) &= 72x^2 + 145x + 72. \end{aligned}$$

Endlich entwickeln wir das Produkt:

$$(2x + 3)(3x + 1)(5x + 2).$$

Nach dem dritten Multiplikationsgesetze mufs dasselbe herauskommen, wenn man bei der Ausführung irgend zwei Faktoren zu

einem Unterprodukte vereinigt und das Ergebnis mit dem dritten Faktor multipliziert. Die Ausführung zeigt nachstehende Darstellung:

$$\begin{array}{rrrr} 2x & +\ 3 & & \\ 5x & +\ 2 & & \\ \hline 10x^2 & +\ 15x & & \\ & 4x & +\ 6 & \\ \hline 10x^2 & +\ 19x & +\ 6 & \\ & 3x & +\ 1 & \\ \hline 30x^3 & +\ 57x^2 & +\ 18x & \\ & 10x^2 & +\ 19x & +\ 6 \\ \hline 30x^3 & +\ 67x^2 & +\ 37x & +\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 3x & +\ 1 & & \\ 2x & +\ 3 & & \\ \hline 6x^2 & +\ 2x & & \\ & 9x & +\ 3 & \\ \hline 6x^2 & +\ 11x & +\ 3 & \\ & 5x & +\ 2 & \\ \hline 30x^3 & +\ 55x^2 & +\ 15x & \\ & 12x^2 & +\ 22x & +\ 6 \\ \hline 30x^3 & +\ 67x^2 & +\ 37x & +\ 6. \end{array}$$

Ergebnis:

$$(2x + 3)(5x + 2)(3x + 1) = 30x^3 + 67x^2 + 37x + 6.$$

Zahlenprobe:

$$7 \cdot 12 \cdot 7 = 240 + 268 + 74 + 6 = 588.$$

Andere Proben bilde der Lernende selbst. Man merke:

$$x^2 \cdot x = x \cdot x \cdot x = x^3.$$

§ 4. Beweis der Multiplikationsgesetze für ganze positive Zahlen.

Erstes Multiplikationsgesetz: $ab = ba$.

Beweis. Es sei eine Menge von Punkten in der Weise angeordnet, wie die folgende Darstellung zeigt:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

In der ersten wagerechten Reihe mögen sich a Punkte befinden, dann befinden sich in der zweiten ebensoviele, in den beiden ersten wagerechten Zeilen sind also zusammen $2a$, in den drei ersten zusammen $3a$ und in b Zeilen zusammen ba Punkte enthalten.

Da b Zeilen vorhanden sind, so sind in der ersten senkrechten Zeile b Punkte, in den zwei ersten also $2b$, in den drei ersten $3b$ und in sämtlichen a senkrechten Zeilen ab Punkte enthalten.

Nun ist die Anzahl der gezählten Punkte unabhängig von der Art der Zählung, daher

$ba = ab$, was zu beweisen war.

Anmerkung. Wären in jeder Reihe $n+1$ Punkte und ebensoviele Reihen vorhanden, so könnte man von entgegengesetzten Ecken aus der andern Diagonale parallel abzählend zu dem Ergebnisse gelangen:

$$1+2+3+\ldots\ldots+n+(n+1)$$
$$+1+2+3+\ldots\ldots+n=(n+1)(n+1).$$

Zweites Multiplikationsgesetz: $n(a+b+c+d) = na+nb+nc+nd.$

Beweis. Um die Multiplikation auszuführen, setzen wir den Multiplikandus $a+b+c+d$ so oft als Summanden, als der Multiplikator n angiebt. Dann erhalten wir:

$$\begin{array}{c} a+b+c+d \\ a+b+c+d \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a+b+c+d. \end{array}$$

Hier haben wir $a+b+c+d$ nicht dreimal, sondern $n$mal aufgeschrieben zu denken. Die Zwischenpunkte deuten die fehlenden Reihen an. Da nun die Anzahl der gezählten Dinge unabhängig ist von der Art der Zählung, so können wir zuerst die Gröfsen a, dann die Gröfsen b u. s. w. zusammenzählen. Wir erhalten $n$mal den Summanden a, also na, ebenso nb u. s. w. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Satz bleibt richtig, wenn statt der gewählten vier Summanden a, b, c, d beliebig viele vorhanden sind.

Drittes Multiplikationsgesetz.

Wir beginnen mit dem besondern Falle von drei Faktoren.

$$a(bc) = b(ac) = c(ab) = abc.$$

$a(bc)$ heifst: es soll das Produkt bc so oft als Summand gesetzt werden, als die Zahl a angiebt. Wir führen dies aus und erhalten:

$$bc+bc+bc+\ldots\ldots+bc.$$

Dafür kann man nach dem zweiten Multiplikationsgesetze eintreten lassen: $b(c+c+c+\ldots\ldots\ldots+c)$
oder auch $c(b+b+b+\ldots\ldots\ldots+b)$.
Im erstern Falle ist der Klammerausdruck ac, im zweiten ab und daher die Behauptung bewiesen.

Ein Produkt aus vier Faktoren $abcd$ bilden wir nun so, dafs wir das aus drei Faktoren bestehende Produkt bcd mit der Zahl a multiplizieren. Wir behaupten nun:

$$a(bcd) = (ac)(bd).$$

Beweis. Das Produkt bcd besteht aus drei Faktoren, kann daher so gebildet werden, daſs man die Zahl c mit dem Produkte bd multipliziert. Nun haben wir für das Hauptprodukt drei Faktoren, nämlich a, c, bd. Also kann man nach dem bereits Bewiesenen zuerst a mit c multiplizieren und das Ergebnis mit bd. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir behaupten ferner:

$$a\,(bcd) = b\,(acd).$$

Beweis. Das Produkt bcd bilden wir in der Form $b\,(dc)$. Nun haben wir für das Hauptprodukt drei Faktoren, nämlich a, b, dc. Folglich können wir den ersten und dritten zum Produkte acd vereinigen und das Ergebnis mit b multiplizieren. Ebenso zeigt man:

$$a\,(bcd) = c\,(abd) = d\,(abc) = (ad)\,(bc) = (ab)\,(cd).$$

Nunmehr ist das dritte Multiplikationsgesetz für vier Faktoren bewiesen. Ebenso zeigt man, daſs es für fünf Faktoren richtig ist. Denn dabei treten vier Faktoren auf, welche mit einem fünften multipliziert werden sollen. Für vier Faktoren ist aber das Gesetz bereits bewiesen. Man kann also einen derselben herausheben, wodurch man drei Faktoren erhält, nämlich den fünften, den herausgehobenen und das Produkt der drei andern. Für drei Faktoren ist aber das Gesetz bewiesen u. s. w.

$$a\,(bcde) = a \cdot d \cdot (bce) = d\,(abce) = (ad)\,(bce).$$

Ebenso gelten obige Schlüsse für sechs, sieben u. s. w. Faktoren.

Anmerkung 1. Bei der ersten Durchnahme beschränke man sich auf den Beweis dieses Gesetzes für drei Faktoren.

Anmerkung 2. Was heiſst $1 \cdot a$? Wörtlich heiſt es: a soll einmal als Summand gesetzt werden. Darin liegt eine unbedeutende Schwierigkeit, weil der Begriff Summand nicht einen einzelnen Summanden zuzulassen scheint. Gröſser wird die Schwierigkeit, wenn man $0 \cdot a$ seinem Werte nach aus der bloſsen Begriffserklärung bestimmen will. Fragen wir das erste Multiplikationsgesetz, so sagt dasselbe:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = a$$
$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Diese Sätze sollen für jeden Wert von a gültig sein. Daher ist auch $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 0 = 0$ und $0 \cdot 0 = 0$. Hieraus folgt auch die Richtigkeit des vierten Multiplikationsgesetzes für ganze positive Zahlen.

§ 5. Übungen.

Wendet man das zweite Multiplikationsgesetz wiederholt an, so folgt:

$$(a + b)\,(c + d) = (a + b)\,c + (a + b)\,d = ac + bc + ad + bd.$$

Daher ergiebt sich der Satz: Eine Summe wird mit einer andern multipliziert, indem man jeden Summanden der einen mit jedem Summanden der andern multipliziert und die so gewonnenen Produkte addiert.

Durch Anwendung dieses Satzes erhalten wir folgende Gleichung:

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x^2 + 2x + 1) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Richtigkeit derselben bestätigen wir durch Zahlenproben.

Zahlenproben sind in der Arithmetik von äufserster Wichtigkeit, auch dann, wenn strenge Beweise für die Richtigkeit der Rechnung vorausgehen. Man betrachte es als Grundsatz: Keine Rechnung ohne Probe!

In dem vorhergehenden Beispiel merken wir:

$$x^3 \cdot x^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^5;$$
$$x^2 \cdot x^2 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^4;$$
$$x \cdot x^3 = x \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^4.$$

Ebenso finden wir:

$$(x^7 + x^5 + x^3 + x)(x^6 + x^4 + x^2 + 1) = x^{13} + 2x^{11} + 3x^9 + 4x^7 + 3x^5 + 2x^3 + x \quad \ldots \quad (2)$$

Hier lernen wir u. a.:

$$x^7 \cdot x^6 = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^{13};$$
$$x^7 \cdot x^4 = x^{11};\ x^5 \cdot x^6 = x^{11};\ x^5 \cdot x^2 = x^7 \text{ u. s. w.}$$

Man berechne $(x + 1)^7$.

Nach der Erklärung der Potenz hat dieser Ausdruck den Sinn, dafs $x + 1$ siebenmal als Faktor stehen soll. Also:

$$(x + 1)^7 = (x + 1)(x + 1)(x + 1)(x + 1)(x + 1)(x + 1)(x + 1).$$

Fassen wir die drei ersten und dann die vier letzten Faktoren zu Unterprodukten zusammen, so wird

$$(x + 1)^3 (x + 1)^4 = (x + 1)^7.$$

Für die Unterprodukte hat man die Werte:

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

und für das Hauptprodukt:

$$(x + 1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Man findet durch Anwendung der Multiplikationsgesetze:

$$(5a + 3b + 2)(6a + b + 3) = 30a^2 + 23ab + 3b^2 + 27a + 11b + 6 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Diese Gleichung ist richtig für jeden beliebigen Wert, welchen a und b annehmen können. Nehmen wir $a = 1$, $b = 2$, so wird

$$13 \cdot 11 = 30 + 46 + 12 + 27 + 22 + 6 = 143.$$

Nehmen wir $a = 0$, so wird

$$(3b + 2)(b + 3) = 3b^2 + 11b + 6.$$

Nehmen wir $b = a$, so wird

$$(8a + 2)(7a + 3) = 56a^2 + 38a + 6.$$

Gleichung (3) ist nach fallenden Potenzen von x geordnet; die Zahlfaktoren 7, 21, 35 sowie in (4) die Zahlen 30, 23, 3, 27, 11, 6 nennt man Koefficienten; 6 als mit keiner allgemeinen Gröfse multipliziert nennt man zuweilen das Absolutglied.

Es ist $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$. (5)

Nach dieser Formel (so wird eine allgemeingültige Gleichung von besonderer Wichtigkeit genannt) berechne man zahlreiche Beispiele wie folgende:

$$a = 40,\ b = 1;\ 41^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681.$$
$$a = 30,\ b = 2;\ 32^2 = 900 + 120 + 4 = 1024.$$

In Gleichung (4), welche man nicht Formel nennen würde, sind die Glieder $30a^2$, $23ab$, $3b^2$ zweiter Dimension, $27a$, $11b$ erster Dimension. Gleichung (5) enthält nur Glieder zweiter Dimension, sie ist homogen.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \qquad (6)$$

Auch diese Gleichung (Formel) ist homogen. Ebenso ist

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a + 3a^2c + 3b^2a + 3c^2b + 6abc \quad . \ . \ . \quad (7)$$

eine homogene Gleichung. Sie enthält nur Glieder dritter Dimension.

§ 6. Gleichungen. Andere Rechnungsarten.

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit solchen Gleichungen beschäftigt, welche für jeden Wert der allgemeinen Gröfsen richtig waren. Solche Gleichungen nennt man identische Gleichungen, oft auch Formeln.

Andere Gleichungen sind etwa die folgenden:

$$5x + 3 = 13;$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Die erste Gleichung ist nur richtig für $x = 2$, die zweite für $x = 2$ und auch für $x = 5$. Spricht man in der Arithmetik und Algebra von „Gleichungen“, so ist immer diese besondere Art, es sind Bestimmungsgleichungen gemeint. Die Gröfse x

verdient hier nicht den Namen „allgemeine Gröfse“; man mufs dieselbe vielmehr „unbekannte“ Gröfse nennen.

Eine Gleichung auflösen heifst so viel als den oder die Werte der „unbekannten“ Gröfse angeben, welche in die Gleichung eingesetzt dieselbe richtig machen.

Kommen allgemeine Gröfsen in den Gleichungen vor, welche als bekannt, als gegeben angesehen werden sollen, so bezeichnet man dieselben durch die Buchstaben a, b, c, d u. s. w.; auch durch a_0, a_1, a_2 oder durch a', a'', a''' u. s. w. Sind mehrere Unbekannte vorhanden, so bezeichnet man sie durch x, y, z u. s. w.; x_0, x_1, x_2; x', x'', x''' u. s. w.[1]

Betrachten wir nun die Gleichungen:

$$x + a = b;\ cx = d;\ x^m = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die erste verlangt Bestimmung einer Zahl (Differenz oder Rest), welche zu einer gegebenen Zahl (Subtrahendus) addiert eine zweite gegebene Zahl (Minuendus) hervorbringt. Dies ist die Aufgabe der Subtraktion. Man löst dieselbe dadurch, dafs man vom Subtrahendus ausgehend so lange weiterzählt, bis man auf den Minuendus trifft. Hieraus folgt, dafs die Aufgabe der Subtraktion auf dem bisherigen Zahlengebiete nur dann gelöst werden kann, wenn der Minuendus gröfser ist als der Subtrahendus.

Die zweite Gleichung verlangt Bestimmung einer Zahl (Quotient), welche mit einer gegebenen Zahl (Divisor) multipliziert eine zweite gegebene Zahl (Dividendus) hervorbringt. Dies ist die Aufgabe der Division. Man löst dieselbe dadurch, dafs man die verschiedenen Vielfachen des Divisors der Reihe nach bildet, bis man auf den Dividendus trifft. Hieraus folgt, dafs die Aufgabe der Division auf dem bisherigen Zahlengebiete nur dann gelöst werden kann, wenn der Dividendus ein genaues Vielfaches des Divisors ist. Die Gleichung $2x = 7$ ist unlösbar, wenn man keine andern Zahlen kennt als ganze Zahlen.

Die dritte Gleichung verlangt Bestimmung einer Zahl (Wurzel), welche in eine durch eine gegebene Zahl (Wurzelexponent) bestimmte Potenz erhoben eine zweite gegebene Zahl (Radikandus) hervorbringt. Dies ist die Aufgabe der Radikation. Man löst dieselbe dadurch, dafs man die Zahlen 1^m, 2^m, 3^m u. s. w. be-

---

[1] Man spricht a_1 aus „a-eins“, dagegen a' „a-Strich“; a_2 spricht man „a-zwei“, a'' dagegen „a-zwei Strich“ u. s. w.

rechnet, bis man auf den Radikandus n trifft. Die Aufgabe der Radikation kann auf dem bisherigen Zahlengebiete nur dann gelöst werden, wenn der Radikandus n genau eine m^{te} Potenz ist. So bietet die Gleichung

$$x^3 = 729$$

die Lösung $x = 9$. Dagegen ist die Gleichung

$$x^2 = 5$$

unlösbar, wenn man keine andern Zahlen kennt als ganze Zahlen.

Betrachten wir die drei Gleichungen:

$$x + 9 = 5;\ 7x = 54;\ x^5 = 40,$$

so werden wir sagen, die Lösung der zweiten müsse zwischen $x = 7$ und $x = 8$, die der dritten zwischen $x = 2$ und $x = 3$ liegen, während die der ersten ganz unmöglich zu sein scheint.

Wir wollen die Gleichungen (8) in anderer Form wiederholen:

$$x + a = b;\ ax = b;\ x^a = b \quad \ldots \quad (9)$$

Um die Zahl x als Rechnungsergebnis aus den „bekannten" Zahlen a und b darzustellen, bedient man sich der Schreibart:

$$1)\ x + a = b, \qquad 2)\ ax = b,$$
$$x = b - a; \qquad x = \frac{b}{a};$$
$$3)\ x^a = b,$$
$$x = \sqrt[a]{b}.$$

Die Gleichungen

$$x = b - a;\ x = \frac{b}{a};\ x = \sqrt[a]{b} \quad \ldots \quad (10)$$

sagen also **sachlich genau dasselbe** aus wie die entsprechenden Gleichungen (9). Der Unterschied liegt nur in der Schreibart, nicht in der Bedeutung.

Anmerkung. Die genannten sechs Rechnungsarten erschöpfen das ganze Gebiet der Algebra. Die naheliegende Gleichung $a^x = b$ ist nicht mehr algebraisch, sondern transcendent.

§ 7. Die Subtraktion.

Wir betrachten die beiden Gleichungen

$$x + a = b;\ x = b - a,$$

welche sachlich nicht verschieden sind. Setzen wir für x den andern Ausdruck in die erste ein, so wird

$$b - a + a = b \quad \ldots \quad (11)$$

Statt $x + a = b$ kann auch geschrieben werden $a + x = b$. Daher ist

$$a + b - a = b \quad \ldots \quad (11a)$$

Ist statt der Gröfse a eine Summe vorhanden, so sagen die beiden Gleichungen

$$x + a + c = b;\; x = b - (a + c)$$

dasselbe aus; folglich ist

$$b - (a + c) + a + c = b.$$

Aber hier kann man auch anders verfahren. Fafst man $x + a$ als den einen, c als den andern Summanden auf, so folgt:

$$x + a = b - c;$$

folglich auch $x = (b - c) - a.$

Hätte man $x + c$ als den einen, a als den andern Summanden aufgefafst, so würde sich ergeben haben:

$$x + c = b - a,$$
$$x = (b - a) - c.$$

Nun haben wir für x drei nur der Schreibart nach verschiedene Werte:

$$b - (a + c) = (b - c) - a = (b - a) - c.$$

Daher sind die Klammern zum Teil überflüssig, und wir finden:

$$b - (a + c) = b - c - a = b - a - c,$$

ähnlich wie beim dritten Multiplikationsgesetz abc für $a\,(bc)$, $b\,(ac)$ und $c\,(ab)$ geschrieben wurde. Ebenso beweist man:

$$b + c - (a + d + e) = b + c - a - d - e \text{ u. s. w.}$$

Nunmehr betrachten wir die Gleichungen:

$$x + a = b;\; y + c = d;\; z + e = f.$$

Dann ist $x = b - a;\; y = d - c;\; z = f - e.$

Addieren wir obige Gleichungen, so ist:

$$x + y + z + a + c + e = b + d + f.$$

Hier haben wir aufser dem Grundsatze der Addition: Die Anzahl der gezählten Dinge ist unabhängig von der Art der Zählung (§ 4), auch noch den weitern angewendet:

Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches.

Mithin ist $x + y + z = b + d + f - a - c - e,$

also $(b - a) + (d - c) + (f - e) = b + d + f - a - c - e.$

Betrachten wir nun die Gleichung

$$x + b - a = c,$$

so ergiebt sich zunächst:

$$x = c - (b - a).$$

Addieren wir aber zu ersterer auf beiden Seiten a, so folgt:

$$x + b - a + a = a + c,$$

also nach (11) $x + b = a + c$

oder $$x = a + c - b.$$

Daher ist $$c - (b - a) = a + c - b = c - b + a \quad . \quad . \quad (12)$$

Wenn wir nun die Gleichung

$$x + a = b$$

beiderseits mit c multiplizieren, so folgt nach dem Grundsatze:

Gleiches gleich behandelt giebt Gleiches,

und nach dem zweiten Multiplikationsgesetze:

$$cx + ac = bc,$$

mithin nach unserer angenommenen Schreibart (10)

$$cx = bc - ac,$$

oder indem wir für x auch die andere Schreibart wählen:

$$c(b - a) = bc - ac \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Wenn wir die beiden Gleichungen

$$x + a = b,$$
$$y + c = d$$

miteinander multiplizieren, so folgt (§ 5):

$$xy + ay + cx + ac = bd,$$

also nach (13), da $x = b - a$, $y = d - c$ ist,

$$xy + a(d - c) + c(b - a) + ac = bd$$

oder $$xy + ad - ac + bc - ac + ac = bd,$$

folglich $$xy = bd - ad - bc + ac,$$

$$(b - a)(d - c) = bd - ad - bc + ac \quad . \quad (14)$$

Ebenso ergiebt sich nach dem zweiten Multiplikationsgesetze und nach (13):

$$(a + b)(c - d) = a(c - d) + b(c - d)$$
$$= ac - ad + bc - bd \quad . \quad (15)$$

Nunmehr können wir das Zeichengesetz als Ergebnis unserer Untersuchungen aussprechen:

Beim Klammerauflösen und Multiplizieren giebt das Zusammentreffen gleicher Vorzeichen *plus*, ungleicher *minus*.

Die zuerst stehende mit keinem Vorzeichen versehene Gröfse gilt als mit *plus* bezeichnet.

§ 8. Übungen.

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6;$$
$$(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12;$$
$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6;$$
$$(x - 4)(x - 5)(x - 6) = x^3 - 15x^2 + 74x - 120;$$
$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) =$$

$$x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720;$$
$$(x-1)^3 - 2(x-2)^2 + 3(x-3) - 4 = x^3 - 5x^2 + 14x - 22.$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$
$$\left.\begin{array}{l}(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3; \quad \ldots\ldots \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \ldots\ldots\end{array}\right\} (19)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$
$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca.$$
$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4; \quad . \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad .\end{array}\right\} (21)$$
$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \quad (22)$$

Die Gleichungen dieses Paragraphen sind nicht blofs sämtlich auszurechnen, sondern jede durch möglichst viele Zahlenproben als richtig zu bestätigen. Einige derselben, mindestens (16), (17), (18), (20) sind auswendig zu lernen.

§ 9. Division.

Wir betrachten die beiden Gleichungen

$$ax = b \text{ und } x = \frac{b}{a}, \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

welche nur durch die Schreibart verschieden sind, in der Sache aber dasselbe aussagen. Wenn b nicht ein genaues Vielfaches von a ist, so ist die Aufgabe der Division durch ein ganzzahliges x nicht lösbar. So verlangt die Gleichung $2x = 7$ Angabe einer Zahl, welche mit 2 multipliziert gleich 7 wird. Eine solche Zahl, wenn Zahl im Sinne von „ganze Zahl“ genommen wird, giebt es nicht; denn die Probe zeigt, dafs $x = 3$ zu klein und $x = 4$ zu grofs ist. Um nun nicht genötigt zu sein, die Aufgabe als „unlösbar“ zu bezeichnen, sagen wir: $\frac{7}{2}$ ist auch eine wahre Zahl, und zwar diejenige, welche mit 2 multipliziert 7 giebt.

Die Zahl $\frac{b}{a}$ wird eine gebrochene, ein Bruch genannt; b ist der Zähler, a der Nenner.

Multiplizieren wir die erste der Gleichungen (23) mit der Zahl m, so folgt $max = mb.$

Demzufolge ist also x diejenige Zahl, welche mit ma multipliziert mb ergiebt. Hierfür haben wir in anderer Schreibart

$$x = \frac{mb}{ma}.$$

Mithin ist $$\frac{b}{a} = \frac{mb}{ma}, \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

oder in Worten ausgedrückt: **Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.**

Es sei $ax = b;\ ay = c;\ az = d.$

Addiert man die rechten und linken Seiten dieser Gleichungen, so ist nach dem zweiten Multiplikationsgesetze

$$a(x + y + z) = b + c + d,$$

folglich nach unserer andern Schreibart

$$x + y + z = \frac{b + c + d}{a},$$

mithin, wenn wir auch links die andere Schreibart anwenden:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} = \frac{b + c + d}{a} \quad \ldots \quad (25)$$

Brüche mit gleichem Nenner werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner unverändert läfst.

Ebenso beweist man

$$\frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b - c}{a} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Brüche mit gleichem Nenner werden voneinander subtrahiert, indem man die Zähler in gleicher Reihenfolge subtrahiert und den Nenner unverändert läfst.

Hieraus folgt:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{d} = \frac{bd}{ad} + \frac{ac}{ad} = \frac{bd + ac}{ad} \quad \ldots \quad (27)$$

Brüche werden addiert, indem man sie zuerst gleichnamig macht, dann die Zähler addiert und den gemeinsamen Nenner erteilt.

Ebenso findet man

$$\frac{b}{a} - \frac{c}{d} = \frac{bd}{ad} - \frac{ac}{ad} = \frac{bd - ac}{ad} \quad \ldots \quad (28)$$

Brüche werden voneinander subtrahiert, indem man sie zuerst gleichnamig macht, dann die Zähler in entsprechender Reihenfolge voneinander subtrahiert und den gemeinsamen Nenner erteilt.

Sei $ax = b,\ y = c$; dann ist $ay = ac$, folglich durch Addition nach dem zweiten Multiplikationsgesetze

$$a(x + y) = ac + b;$$

in anderer Schreibart: $x + y = \frac{ac + b}{a}$

oder $$\frac{b}{a} + c = \frac{ac + b}{a} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

Gleichung (29) enthält das Verfahren, eine ganze Zahl und einen Bruch zu addieren.

Anmerkung. Jede ganze Zahl kann als Bruch geschrieben werden. Denn aus der Gleichung $x = a$ folgt:

$$1 \cdot x = a;\ 2x = 2a \ldots\ldots mx = ma.$$

Daher ist nach der Schreibart in Bruchform:

$$x = \frac{a}{1};\ x = \frac{2a}{2};\ x = \frac{ma}{m}$$

oder $$a = \frac{a}{1} = \frac{2a}{2} = \ldots = \frac{ma}{m} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Multiplizieren wir die Gleichung $ax = b$ beiderseits mit m, so folgt: $$max = mb.$$

Nach dem dritten Multiplikationsgesetze können wir uns die Multiplikation links so ausgeführt denken, dafs das Produkt mx mit der Zahl a vervielfacht ist. Dann erhalten wir nach der Schreibart in Bruchform $mx = \frac{mb}{a}$,

also, wenn für x sein Wert gesetzt wird,

$$m \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{a} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner unverändert läfst.

Lehrsatz. Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Zähler unverändert läfst und den Nenner mit der Zahl multipliziert.

Beweis. Nach der Erklärung von Division (§ 6) ist zu zeigen, dafs der Quotient $\frac{b}{ma}$ mit dem Divisor m multipliziert den Dividendus $\frac{b}{a}$ giebt. Dies ist in der That der Fall; denn es ist

$$m \cdot \frac{b}{ma} = \frac{mb}{ma} = \frac{b}{a} \text{ nach Gl. (31) und (24).}$$

Lehrsatz. Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Beweis. Wir haben die Gleichungen:

$ax = b$ gleichbedeutend mit $x = \frac{b}{a}$,

$cy = d$ „ „ $y = \frac{d}{c}$.

Die Multiplikation der erstern Form ergiebt:

$$ac\,xy = bd.$$

Fassen wir ac als den einen, xy als den andern Faktor des links stehenden Produktes auf, so wird nach der zweiten Schreibart

$$xy = \frac{bd}{ac},$$

oder wenn wir für x und y ihre Werte setzen:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Lehrsatz. Ein Bruch wird durch einen zweiten dividiert, indem man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multipliziert.

Beweis. $\frac{a}{b}$ sei der Dividendus, $\frac{c}{d}$ der Divisor. Dann wird der Quotient $\frac{ad}{bc}$. Dies ist die Behauptung. Um ihre Richtigkeit darzuthun, müssen wir zeigen, dafs der Quotient mit dem Divisor multipliziert den Dividendus giebt. Dies ist der Fall; denn es ist

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

Das Zeichen der Division ist auch ein Doppelpunkt. Die letzte Gleichung hätten wir auch schreiben können:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Doppelbrüche sind zu vermeiden. Jeder Doppelbruch kann entfernt werden durch Erweiterung des Hauptbruches; z. B.:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{16 + 20}{18 - 3} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}.$$

Einen Bruch erweitert man, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert; man kürzt einen Bruch, wenn man Zähler und Nenner von einem gleichen Faktor befreit.

Wenn ein Bruch so beschaffen ist, dafs Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Faktor enthalten, so ist er auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht. Zähler und Nenner sind alsdann relative Primzahlen.

Bisher haben wir die Brüche nur als Zahlen kennen gelernt, welche in den Rechnungsgesetzen mit den ganzen Zahlen übereinstimmen. Gröfsenvergleichungen haben wir bisher bezüglich derselben nicht angestellt. Dies soll jetzt geschehen.

$a \cdot \frac{1}{b}$ ist nach dem Rechnungsgesetze in Gl. (31) gleich $\frac{a}{b}$.

Andererseits ist $a \cdot \frac{1}{b}$ nach der Erklärung von Multiplikation mit der ganzen Zahl a gleich der Summe

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots . + \frac{1}{b},$$

wo der Summand $\frac{1}{b}$ genau $a$mal gesetzt wird. Folglich ist ein Bruch um so gröſser, je gröſser sein Zähler ist. Sind zwei Brüche mit gleichem Nenner, aber ungleichem Zähler gegeben, so kann man den Bruch mit gröſserem Zähler in zwei Teile zerlegen, von denen der eine genau dem andern Bruche gleich ist.

Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl der Gröſse nach verglichen werden, etwa $\frac{a}{b}$ mit c, so geben wir der Zahl c die Form $\frac{bc}{b}$, und es bleibt nun zu entscheiden, welche von den ganzen Zahlen a und bc die gröſsere ist. Ist $c = 1$, so ergiebt sich hieraus:

Ist der Zähler kleiner als der Nenner (echter Bruch), so ist der Wert des Bruches kleiner als eins.

Ist der Zähler gröſser als der Nenner (unechter Bruch), so ist der Wert des Bruches gröſser als eins.

Ein unechter Bruch kann demnach immer in zwei Teile zerlegt werden, von denen der eine eine ganze Zahl, der andere ein echter Bruch ist.

Sind zwei Brüche miteinander zu vergleichen, z. B. $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$, so erteilt man den gemeinsamen Nenner bd und vergleicht die Zähler; dabei ergiebt sich u. a.:

Haben zwei Brüche gleiche Zähler, aber verschiedene Nenner, so ist der Bruch mit kleinerem Nenner der gröſsere. Das Produkt echter Brüche ist kleiner als jeder der Faktoren.

Anmerkung 1. $\frac{0}{a}$ ist diejenige Zahl, welche mit a multipliziert null giebt. Dies leistet 0; daher ist $\frac{0}{a} = 0$ . . . . (34)

Anmerkung 2. Alle in diesem Paragraphen enthaltenen Lehrsätze sind streng aus dem Begriffe der Multiplikation (§ 1) abgeleitet, sobald die angedeuteten Divisionen aufgehen. Indem wir nun, auch wenn letzteres nicht der Fall ist, die Multiplikationsgesetze als gültig ansahen und die Brüche als Zahlen erklärten, für welche die Multiplikationsgesetze gelten, haben wir eine Erweiterung des Multiplikationsbegriffes vorgenommen. Es mag genügen, hierauf für jetzt nur kurz hinzuweisen.

Anmerkung 3. Man kann $\frac{a}{b}$ der Vorstellung zugänglich machen, indem man z. B. eine Strecke von a *cm* in b gleiche Teile teilt. Dieselbe ist sehr geeignet. um die Gröſsenvergleichung der Brüche zu erleichtern und anschaulich zu machen. Für die Ableitung der Gesetze der Zahlenlehre aber ist eine solche Veranschaulichung nicht notwendig. Vielmehr wird durch dieselbe der Begriff der Stetigkeit in ungehöriger Weise eingemengt.

Anmerkung 4. Das vierte Multiplikationsgesetz gilt auch für die Brüche. Denn zwei von null verschiedene Faktoren geben, auch wenn einer oder beide Faktoren Brüche sind, ein von null verschiedenes Produkt. Durch fortgesetzte Multiplikation mit echten Brüchen kann man das Produkt der Null beliebig nähern.

§ 10. Decimalbrüche.

Ein Decimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner 10 oder eine Potenz von 10 ist. Man schreibt diese Brüche folgendermafsen:

$$3{,}25 = 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 3 + \frac{25}{100} = \frac{325}{100};$$

$$0{,}045 = \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{45}{1000};$$

$$25{,}0204 = 25 + \frac{2}{100} + \frac{4}{10\,000} = \frac{250\,204}{10\,000}.$$

Man spricht dieselben folgendermafsen:

3,25 = drei Komma, zwei, fünf;
0,045 = null Komma, null, vier, fünf;
25,0204 = fünfundzwanzig Komma, null, zwei, null, vier.

Diese Schreib- und Sprechweise ist berechtigt und allein zweckmäfsig, weil sie unzweideutig und kurz ist.

Man macht Decimalbrüche gleichnamig durch Anhängen von Nullen.

$$3{,}25 = 3{,}2500;$$
$$0{,}045 = 0{,}0450;$$
$$25{,}0204 = 25{,}0204.$$

Hieraus ergeben sich die Regeln für Addition und Subtraktion der Decimalbrüche.

Es ist $$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Denn es ist $10^m = 10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots . 10$ (m Faktoren);
$10^n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots . 10$ (n Faktoren);
also $10^m \cdot 10^n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots . 10$ ($m + n$ Faktoren).

Hieraus folgt: Zwei Decimalbrüche werden folgendermafsen miteinander multipliziert:

Man läfst die Kommata weg und multipliziert die so entstehenden ganzen Zahlen. Im Produkte zählt man von rechts nach links so viel Stellen ab, als beide Faktoren zusammen Stellen hinter dem Komma besafsen. So erhält man die Stelle, wo im Produkte das Komma zu setzen ist. Fehlende Stellen ersetzt man durch dem Produkte voranzustellende Nullen.

Da $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ ist, so dividiert man einen Decimalbruch durch einen andern, indem man beide zunächst gleichnamig macht, dann die Kommata wegläfst und die entstehenden ganzen

Zahlen durcheinander dividiert, und zwar in gleicher Zuordnung: Dividendus bleibt Dividendus.

Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Decimalbruch verwandelt, indem man Zähler und Nenner des gewöhnlichen Bruches mit einer hinreichend hohen Potenz von 10 multipliziert und dann Zähler und Nenner des neuen Bruches durch den ursprünglichen Nenner dividiert:

$$\frac{5}{8} = \frac{5000}{8000} = \frac{625}{1000} = 0{,}625.$$

Dieses Verfahren führt nur dann zu einem geschlossenen Ausdruck, wenn der Nenner des ursprünglichen Bruches keine andern Primfaktoren enthält als 2 oder 5.

Enthält der Nenner andere Primfaktoren, so erhält man einen unendlichen, und zwar einen periodischen Decimalbruch. Periodisch heifst er, weil seine Ziffern in einer bestimmten Weise wiederkehren. Dies zeigt die Erfahrung. Der Beweis kann erst an anderer Stelle geführt werden.

Beispiele. 1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$;

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} = 0{,}50000 \\ \frac{1}{3} = 0{,}33333 \\ \frac{1}{4} = 0{,}25000 \end{array}\right\} +$$

$$\frac{13}{12} = 1{,}08333.$$

2) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$;

$$0{,}66667 \cdot 0{,}57143 = 0{,}38095\ 52381$$

$$\frac{8}{21} = 0{,}38095\ 238095\ \ldots$$

Hierzu ist zu bemerken:

Da wir die Entwicklung von $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{7}$ auf der fünften Decimale abbrachen, so mufsten wir die letzte Stelle erhöhen, um den unvermeidlichen Fehler möglichst klein zu machen. Wie die Probe zeigt, ist unser Ergebnis etwas zu grofs, aber die fünf ersten Decimalen sind richtig. Demnach war es zwecklos, die weiteren fünf zu berechnen. Eine Methode, welche solche überflüssigen Rechnungen von vornherein vermeidet, nennt man abgekürzte Multiplikation. Dieselbe würde sich für unser Beispiel vollziehen wie nachstehender Überblick zeigt:

0, 6̀6̀6̀7̀
0, 57143
0,333335
46667
667
266
20
0,380955

Das Decimalkomma wird nicht nach der obigen Regel, sondern nach einer Überschlagsrechnung gesetzt: $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$. Die Ziffern des Multiplikators werden der Reihe nach mit dem Gravis versehen. Die Multiplikation geht im Multiplikator von links nach rechts vor sich.

$$3)\ \frac{5}{6} : \frac{3}{8} = \frac{40}{18};$$

$$0{,}83333 : 0{,}375 = \frac{83\,333}{37\,500} = 2{,}22222.$$

Auch hier hat man eine abgekürzte Methode. Dieselbe besteht darin, dafs man im Dividendus nicht Nullen anhängt, sondern die Stellen des Divisors der Reihe nach kommatisiert.

Beispiel. $\frac{3363}{2378} = 1{,}4142137;$

$$\left(\frac{3363}{2378}\right)^2 = \frac{11\,309\,769}{5\,654\,884} = 2{,}000000\ldots$$

$$20\,000\,000 : 14\,142\,137 = 1{,}4142137.$$

14 142 137
5 857 863
5 656 855
201 008
141 421
59 587
56 568
3 019
2 828
191
141
50
42
8

Ein Decimalbruch wird mit 10 multipliziert, indem man das Komma um eine Stelle von links nach rechts versetzt. Er wird

durch 10 dividiert, indem man das Komma um eine Stelle von rechts nach links verschiebt.

Denn durch erstere Verschiebung werden die Ganzen zu Zig, die Zig zu Hundertern u. s. w.; die Zehntel zu Ganzen, die Hundertstel zu Zehnteln u. s. w. Durch die zweite Kommaverschiebung geschieht die entgegengesetzte Verwandlung.

Verschiebt man das Komma um zwei Stellen, so hat man jenachdem eine Multiplikation mit hundert oder eine Division durch hundert bewirkt u. s. w.

Die Rückverwandlung eines geschlossenen Decimalbruches in einen gewöhnlichen Bruch ist selbstverständlich. Aber auch ein unendlicher periodischer Decimalbruch kann in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden. Die Theorie dieser Verwandlung gehört in die Lehre von den geometrischen Reihen. Doch mag schon hier ein Beispiel erwähnt werden:

$$\text{Dann ist} \quad \left.\begin{array}{r} x = 3{,}24\,24\,24\ldots\ldots \\ 100x = 324{,}24\,24\,24\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{„} -$$

$$99x = 321, \quad x = 107 : 33.$$

Anmerkung. Die Gesetze der Gröſsenvergleichung (S. 19) sind hier zu wiederholen.

§ 11. Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die Ordnung einer Gleichung verlangt:

1. Alle Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Potenzierungen, welche die Unbekannte betreffen, müssen ausgeführt sein.

Also statt	$5x + 4x$	hat man zu setzen	$9x$,
„	$ax + bx$	„ „ „ „	$(a + b)\,x$,
„	$7x - x$	„ „ „ „	$6x$,
„	$3\,(2x + 1)$	„ „ „ „	$6x + 3$,
„	$(4x + a)^2$	„ „ „ „	$16x^2 + 8ax + a^2$.

2. Die Unbekannte darf nicht im Nenner und nicht unter einem Wurzelzeichen vorkommen.

3. Die einzelnen Glieder müssen nach fallenden Potenzen von x geordnet sein.

4. Die höchste Potenz von x muſs den Koefficienten 1 haben.

5. Die rechte Seite der Gleichung muſs den Wert 0 haben. Dabei erlaubt sich die Schulmathematik für die Gleichungen ersten und zweiten Grades eine Ausnahme zu machen und zu sagen:

Die Unbekannte darf auf der rechten Seite nicht vorkommen; rechts steht allein das Absolutglied.

Für die Gleichungen ersten Grades bedingt dies die Form:

$$x = a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Ordnung und Lösung sind dasselbe.

Für die Gleichungen zweiten Grades erhalten wir also die Form:

$$x^2 + px = q, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

für die Gleichungen dritten Grades die Form:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{ u. s. w.} \quad . \; . \quad (37)$$

1. Beispiel. $\frac{3x+1}{4} + \frac{5x+2}{7} = 2.$

Die Gleichung ist noch nicht geordnet. Wir multiplizieren beide Seiten mit 4 und erhalten durch Anwendung bekannter[1]

Regeln: $$3x + 1 + \frac{20x+8}{7} = 8,$$

ebenso: $$21x + 7 + 20x + 8 = 56,$$

$$41x + 15 = 56,$$

dann durch Subtraktion der Zahl 15:

$$41x = 41,$$

und durch Division mit 41 endlich die *Lösung:* $x = 1$.

Probe. $\frac{3+1}{4} + \frac{5+2}{7} = 2.$

2. Beispiel. $\frac{ax+b}{c} + \frac{a'x+b'}{c'} = d.$

Durch Anwendung derselben Methoden: Multiplikation mit $c \cdot c'$, Anwendung des zweiten Multiplikationsgesetzes, Subtraktion und Division folgt:

$$(ac' + ca')\,x + bc' + cb' = cc'd.$$

Lösung. $x = \frac{cc'd - bc' - cb'}{ac' + ca'}.$

Setzen wir $a = 3$, $b = 1$, $c = 4$, $a' = 5$, $b' = 2$, $c' = 7$, $d = 2$, so wird $x = \frac{56 - 7 - 8}{21 + 20} = \frac{41}{41} = 1.$

Wir erhalten also das vorige Beispiel und dessen Lösung.

3. Beispiel. $\frac{x+a}{2a+2b} + \frac{x-b}{3a+3b} = \frac{4}{3}.$

Wir multiplizieren mit $6(a+b)$, nachdem wir den Nennern die Form $2(a+b)$ und $3(a+b)$ gegeben haben, und finden:

$$3(x+a) + 2(x-b) = 8(a+b),$$

$$5x = 5a + 10b.$$

Lösung. $x = a + 2b.$

---

[1] Der Lernende hat dieselben wörtlich oder in Buchstaben anzugeben; hier also: $a \cdot \frac{b}{a} = b;\; m\frac{b}{a} = \frac{mb}{a}.$

Probe. $\frac{2a+2b}{2a+2b} + \frac{a+b}{3a+3b} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$

4. Beispiel. $\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+5} = \frac{13}{x^2+8x+15}.$

Lösung. Wir bemerken, dafs

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$$

ist, und finden: $x + 5 + 2x + 6 = 13,$

$$x = \frac{2}{3}.$$

Probe.

$$\frac{3}{2+9} + \frac{6}{2+15} = \frac{117}{4+48+135},$$

$$\frac{3}{11} + \frac{6}{17} = \frac{117}{187}.$$

Anmerkung. **Hätten wir obige Bemerkung über die Zerlegbarkeit des Nenners nicht gemacht, so würden wir eine Gleichung dritten Grades erhalten haben. Auf diese Dinge kann erst später genauer eingegangen werden.**

5. Beispiel. Eine gewisse Zahl giebt, wenn man sie mit 3 multipliziert, zum Ergebnisse 1 addiert, die Summe durch 8 dividiert, 2 zum Quotienten. Wie heifst die Zahl?

Lösung. Man findet die Gleichung:

$$\frac{3x+1}{8} = 2,$$

$$x = 5.$$

6. Beispiel. Ein Arbeiter würde einen Graben in 4 Tagen herstellen. Sein Sohn würde dieselbe Arbeit in 6 Tagen leisten können. In wieviel Tagen wird der Graben vollendet, wenn beide zugleich daran arbeiten?

Lösung. Es mögen *a cbm* Erde zu bewegen sein. Dann hebt der Vater an jedem Tage $\frac{a}{4}$, der Sohn $\frac{a}{6}$ *cbm* Erde aus. Dauert die gemeinsame Arbeit x Tage, so entsteht dementsprechend die Gleichung: $\frac{ax}{4} + \frac{ax}{6} = a,$

mit der Lösung: $x = 2{,}4.$

Die Gröfse a bleibt unbestimmt.

7. Beispiel. Die Zeiger der Uhr stehen um 12 Uhr übereinander; wann wieder?

Lösung. In jeder Zeitminute überstreicht der gröfsere Zeiger den Raum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Minutenstrichen; der Stundenzeiger nur den zwölften Teil. In x Zeitminuten, welche nach 1 Uhr verfliefsen mögen, bis zum Zusammentreffen

der Zeiger, überstreicht daher der Minutenzeiger x, der Stundenzeiger $\frac{x}{12}$ Minutenstriche. Daher die Gleichung:

$$x - \frac{x}{12} = 5,$$

$$x = \frac{60}{11} \text{ Minuten} = 5 \text{ Minuten } 27\frac{3}{11} \text{ Sekunden.}$$

2. Lösung (ohne Gleichung). Innerhalb 12 Stunden stehen die Zeiger genau 11mal übereinander, und zwischen jedem Zusammentreffen liegt die gleiche Zeitgröfse.

8. Beispiel. Ein Kapital ist mit seinen 3prozentigen Zinsen in 4 Jahren zu 224 ℳ angewachsen. Wie hoch beläuft sich das Kapital?

Lösung. 100 ℳ bringen jährlich 3 ℳ Zinsen;

1 „ „ „ $\frac{3}{100}$ „ „

x „ „ „ $\frac{3x}{100}$ „ „

Daher:

$$x + \frac{12x}{100} = 224,$$

$$x = 200.$$

Zweiter Lehrgang.

---

§ 12. Die negativen Zahlen.

Betrachten wir die Gleichung:

$$(x - 5)(x - 7) = x^2 - 12x + 35, \quad . \quad . \quad (38)$$

so zeigt sich, dafs dieselbe für alle Werte bewiesen ist, in denen $x > 7$ [Gl. (14)]. Nehmen wir $x = 7$, so entsteht rechts und links der Wert 0. Für $x = 6$ wird:

$$1 \cdot (6 - 7) = 71 - 72.$$

Dies ist nach unsern bisherigen Festsetzungen inhaltlos. Denn Ausdrücke wie $6 - 7$ und $71 - 72$ verlangen: ersterer Angabe einer Zahl, welche zu 7 hinzugefügt 6 ergiebt, letzterer Angabe einer Zahl, welche zu 72 hinzugefügt 71 ergiebt. Solche Zahlen sind aber auf dem bisher von uns durchforschten Zahlengebiete nicht vorhanden. Wir können nun ein zweifaches Verfahren einschlagen. Entweder verwerfen wir solche Gleichungen als sinnlos und sagen, z. B. Gl. (38) habe nur Gültigkeit für Werte

von $x > 7$; oder wir sagen, Gl. (38) soll auch für $x < 7$ gelten, und Ausdrücke wie 6 — 7, 71 — 72 sollen denselben allgemeinen Rechnungsgesetzen unterworfen sein, welche für die Zahlengröfsen der bisherigen Art Geltung hatten. Entscheiden wir uns für die Verwerfung solcher Gleichungen, so kommen wir in viele Unbequemlichkeiten und Schwierigkeiten. Jeder Rechnung, die von uns ausgeführt wäre, würde eine Untersuchung folgen müssen, ob unter den im Laufe der Arbeit zur Ausführung gelangten Multiplikation sich eine „sinnlose" befindet. Würde eine solche angetroffen, so hätte die Rechnung von neuem zu beginnen, und zwar nach einer Methode, welche der „Sinnlosigkeit" aus dem Wege geht. Dies ist, wenn auch unter Weitläufigkeiten, jedesmal wirklich ausführbar, wenn das Endergebnis einer Gleichungslösung eine ganze Zahl oder ein Bruch ist. — Diese Schwierigkeiten vermeiden wir durch die Zulassung der neuen Zahlengröfsen und haben überdies den Vorteil, dafs wir denselben Gedanken schon § 9 aussprechen und verwenden konnten.

Betrachten wir die Gleichung:

$$\varepsilon + 1 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

so ist ε auf dem Gebiete der bisher betrachteten Zahlengröfsen nicht vorhanden. Wir nehmen aber an, dafs ε eine wahre Zahl ist und den bisherigen Rechnungsgesetzen folgt. Zu der letztern Annahme sind wir gezwungen. Denn ohne dieselbe wäre die Einführung der neuen Zahlengröfsen zwecklos. Insbesondere gelten die Multiplikationsgesetze, und es ist $1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$; $\varepsilon \cdot 0 = 0$.

Nach früherer Festsetzung [Gl. (10)] können wir (39) auch in anderer Schreibart darstellen als

$$\varepsilon = 0 - 1,$$

oder da 0 als „Summand" ohne Bedeutung ist, auch schreiben:

$$\varepsilon = -1 \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

Multiplizieren wir (39) beiderseits mit m, so folgt:

$$m\varepsilon + m = 0$$

oder

$$m\varepsilon = -m;$$

also nach (40):

$$m(-1) = -m \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Aus (39) folgt auch:

$$1 = -\varepsilon,$$

also nach (40):

$$1 = -(-1) \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

Multiplizieren wir (39) beiderseits mit ε, so folgt:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon = 0.$$

Nach (39) ist

$$\varepsilon + 1 = 0,$$

daher

$$\varepsilon^2 + \varepsilon = \varepsilon + 1.$$

Hieraus folgt: $\varepsilon^2 = 1$

oder $(-1)^2 = 1$ . . . . (43)

Jetzt können wir auch die höheren Potenzen von ε bestimmen. Es ist $1 = \varepsilon^2 = \varepsilon^4 = \varepsilon^6 = \ldots; -1 = \varepsilon = \varepsilon^3 = \varepsilon^5 = \ldots$ Jetzt ist auch die Gleichung $x + a = 0$ lösbar. Denn es ist:

$$a\varepsilon + a = 0, \text{ also } x + a = a\varepsilon + a, \; x = a\varepsilon.$$

Die Lösung von $x + a = 0$ lautet also:

$$x = a\varepsilon = a(-1) = -a \text{ [Gl. (41)].}$$

Multiplizieren wir die Gleichung $x + a = 0$ mit b, so folgt:

$$xb + ab = 0,$$

in anderer Schreibart: $xb = -ab$,

und nach Einsetzung des Wertes von x:

$$(-a)\,b = -ab \quad . \; . \; . \; . \; . \; (44)$$

Ebenso ergiebt sich:

$$(-a)(-b) = (-1)\,a \cdot (-1)\,b$$

oder $(-1)^2\,ab = ab$,

also: $(-a)(-b) = ab$ . . . . . . (45)

Dieses Ergebnis kann man auch anders ableiten. Man hat (§ 7):

$$(c - a)(d - b) = cd - ad - bc + ab.$$

Setzt man nun $c = d = 0$, so folgt:

$$(-a)(-b) = ab.$$

Die hier eingeführten neuen Zahlengröfsen, welche die Gleichung

$$x + a = 0$$

lösen und folgerichtig durch $x = -a$ bezeichnet werden, nennt man die negativen Zahlen.

Durch die Einführung derselben wird jede Subtraktion ausführbar, z. B. diejenige, welche durch die Gleichung $x + 12 = 7$ verlangt wird. Denn subtrahieren wir beiderseits 7, so folgt:

$$x + 5 = 0 \text{ oder } x = -5.$$

Man hat also: $7 - 12 = -5$.

Man kann die negativen Zahlen folgendermafsen versinnlichen. Auf einer geraden Linie wählen wir einen beliebigen Punkt, den Nullpunkt, bezeichnen ihn durch 0 und tragen nun vom Nullpunkte aus eine beliebige Strecke in beliebiger Wiederholung ab. Die gewonnenen Teilpunkte, welche dem Beschauer etwa nach rechts liegen mögen, bezeichnen wir durch die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. Dann erhalten wir die Zahlen -1, -2, -3 dargestellt durch Teilpunkte, welche links vom Nullpunkte durch Abtragung der gleichen Strecke gewonnen werden. Addieren heifst dann so viel wie „nach rechts hin weiterzählen", subtrahieren „nach links weiterzählen". Der Gleichung $5 - 7 = -2$ können wir dann einen anschaulichen Sinn beilegen; ebenso der Gleichung $5(-7) = -35$, nicht aber ohne weiteres den Gleichungen $(-7)\,5 = -35$ oder $(-5)(-7) = 35$.

Die von uns § 4 entwickelte Summe oder die entsprechende:

$$2\,(1+2+3+\ldots+n) = n\,(n+1),$$

also

$$1+2+3+\ldots\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

hat für negative und gebrochene n keinen Sinn. Da auf der linken Seite der Begriff der ganzen positiven Zahl wesenhaft vorkommt, so ist eine Deutung für andere Zahlen nicht möglich. Dagegen ist in den Gleichungen $ab = ba$, $a\,(b+c) = ab + ac$ u. s. w. der Begriff der ganzen positiven Zahl nicht mehr enthalten, wenn diese Gesetze an die Spitze der ganzen Darstellung treten. Dann ergiebt sich z. B. der Begriff der Multiplikation ganzer Zahlen als besonderer Fall des zweiten Multiplikationsgesetzes, nämlich:

$$a\,(1+1+1+\ldots+1) = a+a+a+\ldots+a.$$

Demnach ist die von uns durchgeführte Gültigkeitserweiterung eine notwendige, und nur didaktische Gründe haben uns abgehalten, von der Allgemeingültigkeit auszugehen.

§ 13. Übungen.

Sämtliche Aufgaben des § 8 sind wieder durchzunehmen und nun den allgemeinen Gröfsen auch negative Werte zu erteilen. Ferner lösen wir die Gleichungen:

$$1)\quad \frac{5x+2}{3x+1} - \frac{2x-7}{4x-8} = \frac{7}{6}.$$

Ergebnis. $$x = -\frac{1}{31}.$$

Probe. $$\frac{-\frac{5}{31}+2}{-\frac{3}{31}+1} - \frac{-\frac{2}{31}-7}{-\frac{4}{31}-8} = \frac{7}{6}.$$

Doppelbrüche werden weggeschafft [Gl. (33)] u. s. w. Dann finden wir nach Erweiterung mit -1 im zweiten Bruche:

$$\frac{57}{28} - \frac{73}{84} = \frac{7}{6};$$

oder nach Erweiterung des ersten Bruches mit 3:

$$\frac{98}{84} = \frac{7}{6},\ \text{was zu beweisen war.}$$

Anmerkung. Die Bruchgesetze sind hier zu wiederholen.

$$2)\quad \frac{ax}{ax+b} + \frac{bx}{bx+a} = 2.$$

Ergebnis. $$x = -\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Zahlenprobe. $a = 1,\ b = 2.$

Gleichung und Lösung sind:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{2x+1} = 2;\ x = -\frac{4}{5},$$

und dieser Wert in die Zahlengleichung eingesetzt, giebt eine identische Gleichung.

Allgemeine Probe. Man setze den für x gefundenen Wert in die gegebene Gleichung ein, entferne die Doppelbrüche u. s. w.

Nimmt man $a = b = 1$,

so ergiebt sich $\frac{x}{x+1} = 1$.

Diese Gleichung wird durch den Wert $x = -1$ nicht befriedigt, der aus der allgemeinen Lösung folgen würde. Dieselbe wird überhaupt durch keinen Wert von x, weder durch einen positiven noch durch einen negativen, befriedigt. Setzen wir aber x gleich einer sehr grofsen Zahl, etwa $x = 10^6$ oder $x = -10^6$, so wird die Gleichung annähernd richtig. Daher sagt man, die Gleichung werde gelöst durch $x = \infty$ (unendlich). Auch die Hauptgleichung (2) hat die Lösung $x = \infty$.

$$3)\ \frac{ax+b}{cx+d} + \frac{a'x+b'}{c'x+d'} = A.$$

Die Ordnung ergiebt:

$$(ac' + a'c - Acc')\,x^2 + [bc' + ad' + a'd + b'c - A\,(c'd + cd')]\,x = Add' - bd' - b'd.$$

Die Gleichung ist ersten Grades, wenn $A = \frac{ac' + a'c}{cc'}$ gesetzt wird. Also: $\frac{ax+b}{cx+d} + \frac{a'x+b'}{c'x+d'} = \frac{ac'+a'c}{cc'}$.

Der Lernende bilde selbst Aufgaben dieser Art durch willkürliche Annahme der Gröfsen a, b, a', b' u. s. w.

$$4)\ \frac{x+3}{6} - \frac{x+4}{7} + \frac{x+18}{21} = 1.$$

Ergebnis. $x = 3$.

§ 14. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Eine Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten ist etwa folgende: $5x + 3y = 100$.

Dieselbe bietet unzählige Auflösungen dar, sie ist unbestimmt. Nimmt man z. B. $y = 10$, so folgt $x = 14$, nimmt man $x = 29$, so folgt $y = -15$. Damit die Gleichung durch ein bestimmtes Wertepaar befriedigt werde, bedarf es der Hinzufügung einer zweiten Gleichung, etwa:

$$7x + 2y = 87.$$

Zur Lösung führt das sogenannte Ersetzungsverfahren. Man bestimmt aus der einen der beiden gegebenen Gleichungen den Wert einer Unbekannten und ersetzt dieselbe in der andern Gleichung durch diesen Wert.

Die Rechnung verläuft folgendermafsen:

1. Aufgabe.

$$5x + 3y = 100;$$
$$7x + 2y = 87.$$

$$y = \frac{87 - 7x}{2},$$

$$5x + 3\,\frac{87 - 7x}{2} = 100;\ x = \frac{61}{11}.$$

$$y = \frac{87 - 7x}{2} = \frac{265}{11}.$$

Ergebnis. $$x = \frac{61}{11};\ y = \frac{265}{11}.$$

Probe. $$5 \cdot \frac{61}{11} + 3 \cdot \frac{265}{11} = 100;$$
$$7 \cdot \frac{61}{11} + 2 \cdot \frac{265}{11} = 87.$$

Genau so verfährt man, wenn n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben sind. Man bestimmt aus einer der Gleichungen den Wert einer gewissen Unbekannten und ersetzt dieselbe in den übrigen $n - 1$ Gleichungen durch diesen Wert. So erhält man $n - 1$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Dann wiederholt man das Verfahren. Eine Gleichung ersten Grades mit n Unbekannten heifst geordnet, wenn sie die Form hat:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = b,$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_n, b$ keine Nenner aufweisen.

Die Ordnung der entstehenden Gleichungen gehört beim Ersetzungsverfahren nicht in die Reinschrift, sondern ist als Nebenrechnung auf einem besondern Blatte zu behandeln.

Die Ausführung zeigt folgendes Beispiel:

2. Aufgabe[1].

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_5 - x_4 &= 11; \\ x_2 + x_1 - x_5 &= 0; \\ x_3 + x_2 - x_1 &= 0; \\ x_4 + x_3 - x_2 &= 0; \\ x_5 + x_4 - x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots \text{5 Gleichungen mit 5 Unbekannten.}$$

Lösung. $$x_5 = x_3 - x_4.$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 - 2x_4 &= 11; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0; \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0; \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \text{4 Gleichungen mit 4 Unbekannten.}$$

[1] Entnommen der Theorie der fünften Potenzreste.

$$x_4 = x_2 - x_3.$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0; \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \text{ . 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.}$$

$$x_3 = x_1 - x_2.$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 &= 11; \\ -x_1 + 4x_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \text{...... 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.}$$

$$x_1 = 4x_2.$$

$$x_2 = 1 \quad \text{. . . . . Lösung.}$$

Das eigentliche Verfahren ist beendet. Die Ermittlung der übrigen Unbekannten geschieht in der Reihenfolge: x_1, x_3, x_4, x_5.

Ergebnis.

$$x_1 = 4; \; x_2 = 1; \; x_3 = 3; \; x_4 = -2; \; x_5 = 5.$$

Probe durch Einsetzen dieser Werte in die fünf Gleichungen der Aufgabe.

Es giebt noch viele andere Methoden, um Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu lösen. Ist z. B. gegeben:

$$x + y = a; \; x - y = b,$$

so besteht das Lösungsverfahren darin, dafs man die beiden Gleichungen addiert und subtrahiert. Es ergiebt sich dann:

$$x = \frac{a+b}{2}; \; y = \frac{a-b}{2}.$$

Hat man

3. Aufgabe.

$$ax + by = c;$$
$$a'x + b'y = c',$$

so multipliziert man die erste mit b', die zweite mit b; dann erhält man durch Subtraktion und nachfolgende Division:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Multipliziert man die erste mit a', die zweite mit a, so findet man entsprechend

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Zähler und Nenner sind durchaus ähnlich gebildete Gröfsen; man nennt dieselben Determinanten.

In übersichtlicher Form schreibt man:

$$ab' - ba' = \begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix} \quad \text{. . . . . (47)}$$

Man überzeuge sich von der Richtigkeit der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a', & a \\ b', & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + na', & a' \\ b + nb', & b' \end{vmatrix} \quad \text{. . (48)}$$

Ebenso erhält man im Zähler die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a, a' \\ c, c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c, c' \\ b, b' \end{vmatrix}.$$

Hiernach lautet die Lösung in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} a, a' \\ b, b' \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} c, c' \\ b, b' \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

Sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, etwa:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1;$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2;$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3,$$

so erhält man im Nenner die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \quad . \; . \quad (50)$$

Hier überzeugen wir uns von der Thatsache, dafs die Determinante ihr Zeichen wechselt, wenn zwei parallele (senkrechte oder wagerechte) Zeilen miteinander vertauscht werden. Ferner zeigen wir durch Ausrechnung, dafs ihr Wert unverändert bleibt, wenn statt a_1, a_2, a_3 in obiger Determinante gesetzt wird: $a_1 + m b_1 + n c_1$, $a_2 + m b_2 + n c_2$, $a_3 + m b_3 + n c_3$.

Die Lösung kann geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} d_1, b_1, c_1 \\ d_2, b_2, c_2 \\ d_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

Entsprechende Werte erhält man für y und z.

Wenn der Nenner bei der Auflösung verschwindet, z. B. bei den Gleichungen:

$$2x + 3y = 7;$$
$$4x + 6y = 1,$$

so sind die Gleichungen durch endliche Werte der Unbekannten nicht auflösbar.

Wenn unter den n gegebenen Gleichungen sich eine oder mehrere befinden, welche Folge der übrigen sind, so ist die Aufgabe unbestimmt. So ist z. B. für:

$$5x + 3y + 6z = 12;$$
$$2x - 4y - 2z = 6;$$
$$x + 11y + 10z = 0,$$

die dritte eine Folge der beiden ersten; denn man erhält sie, wenn man die mit 2 multiplizierte zweite Gleichung von der ersten subtrahiert.

Anmerkung. Bei der Auflösung der Gleichungen der vorhin besprochenen Art in allgemeinen Zeichen entsteht im Zähler und Nenner der Wert null. Aus $a \cdot 0 = b \cdot 0$ könnte man nun den Fehlschlufs ziehen $a = b$. Derselbe nimmt nämlich an, dafs $\frac{0}{0} = 1$ sei. Man überzeugt sich aber leicht, dafs

nach der Erklärung der Division $\frac{0}{0} = n$ sein kann, wo n eine beliebige Zahl bedeutet. Dieselben Schlüsse gelten für ∞. Man merke als Regel:

Durch 0 zu dividieren ist verboten.

Nimmt man den Nenner eines Bruches kleiner und kleiner, so wird der Bruch gröſser und gröſser. $\frac{a}{x}$ erhält für $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}$ u. s. w. die Werte $10a$, $10^2 a$, $10^3 a$ u. s. w. Daher kann man in diesem Falle sagen, daſs für $x = 0$ der Wert des Bruches ∞ ist. Ebenso zeigt man, daſs für $x = \infty$ der Wert des Bruches 0 ist.

$$\frac{a}{0} = \infty; \ \frac{a}{\infty} = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (52)$$

4. Aufgabe. Man zerlege den Bruch $\frac{25}{21}$ in zwei Einzelbrüche, deren Nenner 3 und 7 seien, deren Zähler die vorgeschriebene Summe a ergeben.

Lösung. Man erhält die Gleichungen:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = \frac{25}{21};$$
$$x + y = a.$$

Das Ergebnis ist:

$$x = \frac{25 - 3a}{4}; \ y = \frac{7a - 25}{4}.$$

Nimmt man $a = 7$, so folgt eine ganzzahlige Auflösung $x = 1$, $y = 6$;

$$\frac{1}{3} + \frac{6}{7} = \frac{25}{21}.$$

5. Aufgabe. Eine dreiziffrige Zahl hat die Quersumme 9. Die aus den beiden ersten Ziffern links gebildete zweistellige Zahl ist um 8 gröſser als die aus den beiden letzten rechts gebildete und um 2 kleiner als diejenige, welche aus der ersten und letzten Ziffer entsteht.

Lösung. Die Zahl heiſse $100x + 10y + z$.
Dann ist $10x + y = 10y + z + 8 = 10x + z - 2$;
ferner $x + y + z = 9$.
Die Zahl ist 324.

6. Aufgabe.

$$2x + 3y + 4z = 13a;$$
$$3x + 5y - 4z = -11b;$$
$$4x - 4y - 12z = -24a.$$

Ergebnis. $x = a + b$; $y = a - 2b$; $z = 2a + b$.

7. Aufgabe.

$$x + y = 2a;$$
$$ax - by + z = 2a^2;$$
$$bx + ay - z = 2b^2.$$

Ergebnis. $x = a + b$; $y = a - b$; $z = a^2 - b^2$.

8. Aufgabe.

$$\begin{aligned} x + 3y - 4z + 5u &= 5; \\ 2x - y + 7z - 3u &= 5; \\ 8x - 7y + 9z - 6u &= 4; \\ 3x + 4y + 5z - 11u &= 1. \end{aligned}$$

Ergebnis. $x = y = z = u = 1.$

9. Aufgabe. (Magisches Quadrat.) Die Zahlen 1, 2, 3 bis 9 sollen so zu dreien in drei untereinanderstehenden Zeilen niedergeschrieben werden, dafs bei jeder senkrechten, wagerechten und diagonalen Reihe die Summe der darin stehenden Zahlen dieselbe sei.

Anleitung. Da $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ und in jeder senkrechten Reihe die gleiche Summe herauskommt, so mufs diese gleiche Summe 15 sein. Dasselbe gilt von jeder wagerechten und also auch von den Diagonalreihen. Addiert man nun die in den beiden Diagonalreihen und die in den mittleren senkrechten und wagerechten Zeilen stehenden Zahlen, so ergiebt sich der Wert der in der Mitte des ganzen Quadrates stehenden Zahl als 5. Nun kann man ansetzen:

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & 15 - x - y, \\ z, & 5, & 10 - z, \\ 15 - x - z, & 10 - y, & 10 - x. \end{array}$$

Hiernach bleibt nur eine einzige Gleichung übrig, nämlich:

$$2x + y + z = 20 \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

Man sieht, dafs die Aufgabe unbestimmt ist. Die Forderung, dafs die Zahlen alle positiv, ganz und voneinander verschieden sein sollen, wird durch die Annahme $x = 8$, $y = 1$, also $z = 3$ befriedigt. Übrigens kann man mit Hülfe von (53) auch noch z aus obiger Darstellung entfernen.

§ 15. Potenzen und Wurzeln.

Schon im § 6 haben wir einiges über diesen Gegenstand kennen gelernt. Wir haben gefunden:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \text{ (doch siehe folgende Seite)}, \\ a^2 &= a \cdot a, \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a^n &= a \cdot a \cdot a \ldots . a \text{ (} n \text{ Faktoren)}. \end{aligned}$$

1. Lehrsatz. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ . . . . (54)

Beweis.

$$\begin{aligned} a^m &= a \cdot a \ldots . a \text{ (} m \text{ Faktoren)}, \\ a^n &= a \cdot a \ldots . a \text{ (} n \text{ Faktoren)}. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir, so erhalten wir a genau $(m + n)$ mal als Faktor, was zu beweisen war.

2. Lehrsatz. $(a^m)^n = a^{mn}$ . . . . (55)

Beweis. Die linke Seite der Gleichung (55) ist, ausführlich geschrieben: $a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots . a^m$ (n Faktoren),
also nach Gl. (54):

$a^{m+m+m+\cdots+m}$ (im Exponenten n Summanden)

oder a^{mn}, was zu beweisen war.

3. Lehrsatz. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ . . . . (56)

Nach der Erklärung der Division ist dies richtig, wenn der Divisor mit dem Quotienten multipliziert den Dividendus ergiebt. Dies ist aber richtig, denn $a^m = a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+m-n}$.

Die vorstehenden Sätze sind unter der Voraussetzung bewiesen, dafs der Exponent eine ganze Zahl, und zwar eine positive ganze Zahl ist. Bei dem dritten Satze [Gl. (56)] müssen wir sogar noch die Einschränkung $m > n$ beifügen. Wollten wir uns diese Beschränkung thatsächlich auferlegen, so würden wir uns den entsprechenden Weitläufigkeiten und Schwierigkeiten unterwerfen müssen, welche wir bei Einführung der Brüche (§ 9) und der negativen Zahlen (§ 12) erwähnt haben. Wir werden daher auch hier eine Erweiterung der Begriffserklärung der Potenz vornehmen und negative, ja gebrochene Exponenten zulassen.

Zunächst wollen wir den Wert von a^0 ermitteln. Wenn wir mit a^0 rechnen wollen, so dürfen wir ihm nicht jeden beliebigen Zahlenwert beilegen, sondern a^0 mufs einen solchen Zahlenwert erhalten, dafs die Potenzgesetze, also Gl. (54) und (55), gültig bleiben. Nach (54) würde sein: $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$.
a^0 ist also diejenige Zahl, welche mit a^m multipliziert a^m ergiebt. Dies leistet ausschliefslich 1, also ist: $a^0 = 1$ . . . . . . (57)

Nun gilt auch (55); denn $(a^0)^m = a^{0 \cdot m} = a^0$, oder $1^m = 1$.

Da $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, so folgt, dafs $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ gesetzt werden mufs. Auch folgt aus $a^1 \cdot a^2 = a^{1+2} = a^3$, dafs $a^1 = a$ ist, falls man in der Bestimmung von a^1 aus dem Begriffe eine Schwierigkeit sieht.

Ebenso hat $a^{\frac{1}{2}}$ nach der bisherigen Erklärung von Potenz keinen Sinn. Fragen wir das Potenzgesetz, so ist:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a.$$

$a^{\frac{1}{2}}$ ist also diejenige Zahl, welche mit sich selbst multipliziert a

ergiebt. Könnte man also in der Gleichung $x^2 = a$ den Wert von x bestimmen, so hätten wir auch den Wert von $a^{\frac{1}{2}}$.

Hiermit sind wir zum Begriffe der Quadratwurzel (§ 6) zurückgeführt; die Gleichungen

$$x^2 = a \text{ und } x = \sqrt{a} \text{ (statt } \sqrt[2]{a}\text{)}$$

sagen genau dasselbe aus. Suchen wir nun nach einem Verfahren, um x durch die bereits bekannten Gröfsen auszudrücken. Fangen wir an mit dem Beispiele: $x^2 = 7$

oder $$x^2 - 7 = 0.$$

Zunächst finden wir, dafs $x > 2$, aber < 3 ist; dann durch Ausrechnung von x^2 für $x = 2{,}1$; $2{,}2$; $2{,}3$ u. s. w., dafs x zwischen 2,6 und 2,7 liegt. Nun versuchen wir für x die Werte 2,61; 2,62 u. s. w. So könnten wir, wenn auch mit grofser Mühe und in unwissenschaftlicher Weise finden, dafs x zwischen den Werten:

2,645751 und 2,645752

liegt. Zur methodischen Bestimmung (Ausziehung) der Quadratwurzel aus Zahlen beachten wir zunächst, dafs durch Erheben einer Zahl, welche am Ende eine gewisse Anzahl Nullen besitzt, ins Quadrat die Anzahl der Nullen verdoppelt wird. Teilt man daher von rechts nach links fortschreitend die Ziffern einer Zahl in Gruppen von je zweien, so kann man immer angeben, zwischen welchen Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w. die Wurzel der gegebenen Zahl liegt. So liegt $\sqrt{3|84}$ zwischen 10 und 20, $\sqrt{38|22}$ zwischen 60 und 70, $\sqrt{7|43|25}$ zwischen 200 und 300 u. s. w. Die weitere Ausführung geschieht durch Probieren in Verbindung mit der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Beispiel. $\sqrt{34|86|78|44|01} = 59049$

25	109
98,6	1180
98 1	11804
57,8	118089
00 0	
5784,4	
4721 6	
1062 801	
1062 801	
"	

Zur Erklärung. Wir ziehen zuerst aus 34 (mit 8 folgenden Nullen), dann aus 3486 (mit 6 folgenden Nullen), dann aus 348678

(mit 4 folgenden Nullen) u. s. w. die Wurzel. Dabei suchen wir jedesmal die zunächst kleinere Zahl zu erhalten. Dies geschieht bei 34 durch bloſses Probieren. Wir finden, daſs die Wurzel liegt zwischen 5 (mit 4 Nullen) und 6 (mit 4 Nullen). Bei $\sqrt{3486}$ ist $a = 50$, b unbekannt. Es soll sein:

$$a^2 + 2ab + b^2 \sim 3486,$$

wo $\sim$ annähernde Gleichheit bedeutet. Also muſs sein:

$$2ab + b^2 \sim 986,$$
$$b\,(100 + b) \sim 986.$$

Es ergiebt sich $b = 9$ und $2ab + b^2 = 9\,(100 + 9) = 981$, Rest 5. Indem wir nun aus 348678 die Wurzel suchen, ist $a = 590$, b unbekannt. Es soll sein:

$$a^2 + 2ab + b^2 \sim 348678.$$

Nun müſsten wir $a^2 = 590^2$ berechnen und von 348678 subtrahieren. Allein dies ist vorhin bereits geschehen; der Rest ist 578 u. s. w.

Zieht man aus 7 die Quadratwurzel, so sucht man sie zunächst aus 7, dann aus 7,00, dann aus 7,0000 u. s. w.

Wenn das Verfahren beim Quadratwurzelausziehen nicht genau aufgeht, so erhält man einen Decimalbruch, der dem Werte der Wurzel so nahe kommt, als man nur will. Aber zu Ende geht das Verfahren in diesem Falle niemals, und der entstehende Decimalbruch ist auch nicht periodisch. Die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl ist entweder eine ganze Zahl oder eine irrationale Zahl. Im letztern Falle kann sie annähernd, aber niemals genau durch einen Bruch dargestellt werden. Da aber die Annäherung bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit getrieben werden kann, so ist es erlaubt, mit diesen Näherungswerten gerade so zu rechnen, als wären sie den betreffenden irrationalen Gröſsen gleich und nicht bloſs annähernd gleich. Die strengen Beweise dieser Behauptungen in Verbindung mit Stetigkeitsbetrachtungen kann die Schulmathematik entbehren.

Lehrsatz. $$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Beweis. Die beiden Gleichungen $x^2 = a$, $y^2 = b$ sagen in anderer Schreibart dasselbe aus wie $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$. Multipliziert man die erstern, so erhält man $x^2 y^2 = ab$ oder nach dem dritten Multiplikationsgesetze $(xy)^2 = ab$. Setzt man hierfür in anderer Schreibart $xy = \sqrt{ab}$, so ist der Satz bewiesen.

Lehrsatz. $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

Beweis. Aus $x^2 = a$, $y^2 = b$ folgt $\frac{x^2}{y^2} = \frac{a}{b}$ oder $\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, was zu beweisen war.

Dieser Lehrsatz wird häufig angewendet. Man mufs immer darauf bedacht sein, den Nenner ganzzahlig zu machen. So würde man setzen: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Dies giebt Veranlassung zu vielen Übungsaufgaben, z. B. zum Nachweise durch wirkliche Ausrechnung, dafs ist:

$$\sqrt{0{,}6666\cdots} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Aus Lehrsatz Gl. (59) folgt, dafs man bei Decimalbrüchen die Abteilung nach Gruppen von je zwei Ziffern immer vom Decimalkomma aus zu vollziehen hat. Es ist z. B.:

$$\sqrt{2{,}1} = \sqrt{\frac{21}{10}} = \sqrt{\frac{210}{100}} = \frac{\sqrt{210}}{10}.$$

Wenn ein algebraischer Ausdruck nur eine einzige Wurzel enthält, so kann man ihm die Form geben:

$$x = \frac{m + n\sqrt{a}}{p + q\sqrt{a}}, \quad \ldots \ldots \quad (60)$$

wo p, q, m, n ganze Zahlen sind. Durch Erweitern mit $p - q\sqrt{a}$ bringt man ihn auf die Form:

$$x = \frac{pm - qna + (pn - qm)\sqrt{a}}{p^2 - aq^2} \quad \ldots \quad (61)$$

Es ist dringend zu warnen vor falschen Gleichungen wie $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$, $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.
Dagegen ist, wenn x eine kleine Gröfse bedeutet, annähernd

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x, \quad \ldots \ldots \quad (62)$$

wie man durch Quadrieren beweist.

$\sqrt{a}$ ist eine Zahl, welche quadriert (mit sich selbst multipliziert, in die zweite Potenz erhoben) a giebt. Das leisten aber immer zwei angebbare Zahlen: $\sqrt{16} = 4$ und auch $= -4$. Daher ist das Zeichen $\sqrt{a}$ seiner Natur nach doppeldeutig. Will man einen der beiden Werte herausheben, so sagt man: „Wir erteilen der Wurzel ihren positiven (negativen) Wert.“ Sind in den Sätzen (58) und (59) den Wurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ in dieser Weise bestimmte Werte beigelegt, so ist das Vorzeichen der rechten Seite nicht mehr zweideutig.

Die Gleichung $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ müfste auch dann bestehen, wenn $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$ nicht auf dem bisherigen Gröfsengebiete durch Annäherung auffindbar wären. Sie ist eben eine Folge der Allgemeingültigkeit der Multiplikationsgesetze. Da aber $\sqrt{3}$ und $\sqrt{7}$ durch Brüche annähernd darstellbar sind, so sagt jene Gleichung oder $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}$ mehr aus; sie

behauptet, dafs die Multiplikation der links stehenden Näherungswerte einen Näherungswert für $\sqrt{21}$ liefert, und zwar mit jedem beliebigen Grade der Annäherung, wenn $\sqrt{3}$ und $\sqrt{7}$ entsprechend genau sind. Die Schulmathematik geht auf diese Fragen wie auf gewisse Stetigkeitserweise nicht ein.

Jede Zahl, mag dieselbe positiv oder negativ sein, giebt quadriert einen positiven Wert. Daher kann man die Lösung der Gleichung $x^2 = -16$ als unmöglich bezeichnen.

Man hat dies in der That lange Zeit gethan. Allein bei der Beschäftigung schon mit den einfachsten Gleichungen dritten und höhern Grades, vor allem aber durch die rechnende Geometrie und durch die elliptischen Funktionen wurden die Mathematiker gezwungen, diesen Gleichungen und den daraus entspringenden Zahlengröfsen ihre ganz besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden.

Aus früher entwickelten Gründen nennen wir die obige Gleichung nicht unmöglich, sondern führen durch die Gleichung

$$i^2 = -1;\ i^2 + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

ein neues Zahlengebiet ein, das der imaginären Zahlen. Über diese Zahlen machen wir dieselben Annahmen wie früher bezüglich der negativen und gebrochenen, nämlich diejenige, dafs sich mit ihnen nach den bisherigen Gesetzen rechnen läfst. Dann finden wir:

$$i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ i^5 = i;\ i^6 = -1;\ i^7 = -i;\ i^8 = 1 \quad (64)$$

Die Gleichung $x^2 = -16$ hat dann die Lösungen $x_1 = 4i$, $x_2 = -4i$.

§ 16. Gleichungen zweiten Grades.

Jede Gleichung zweiten Grades kann man in die Form setzen:

$$x^2 + px = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Addiert man beiderseits $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, so folgt:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Hierfür kann man auch schreiben:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Denn es ist $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. In diesem Falle ist $a = x$, $b = \frac{p}{2}$, also $2ab = px$.

Folglich ist nach der Begriffserklärung der Quadratwurzel

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

Subtrahiert man noch $\frac{p}{2}$, so folgt die nachstehende (auswendig zu lernende) Formel:

Ist die quadratische Gleichung gegeben:

$$x^2 + px = q,$$

so lautet die Auflösung:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Das Zeichen $\sqrt{}$ ist, wie wir im vorigen Paragraphen bemerkten, seiner Natur nach doppeldeutig. Dennoch pflegt man mit Recht für den Anfänger diese Zweideutigkeit noch durch ein Doppelvorzeichen besonders hervorzuheben

1. Beispiel. $x^2 + 6x = 7.$

Hier ist

$$p = 6,\ q = 7,\ \frac{p}{2} = 3,\ -\frac{p}{2} = -3,\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 9.$$

Ergebnis. $x_1 = 1,\ x_2 = -7.$

Probe. $1 + 6 = 7;\ 49 - 42 = 7.$

2. Beispiel. $x^2 + 7x = -6.$

Ergebnis. $x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2};\ x_1 = -1,\ x_2 = -6.$

3. Beispiel. $x^2 - 5x = -4.$

Ergebnis. $x_1 = 4,\ x_2 = 1.$

4. Aufgabe. Man bilde diejenige quadratische Gleichung, deren Wurzeln (Lösungen) die gegebenen Zahlen a und b sind.

1. Lösung. Die Gleichung heifst:

$$(x - a)(x - b) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Dieselbe ist quadratisch und hat die Lösungen $x = a$ und $x = b$; denn ein Produkt wird null, wenn ein Faktor null ist. Die entwickelte Gleichung ist: $x^2 - (a + b)x = -ab$ . . . . (68)
Löst man dieselbe nach der Formel auf, so findet man $x_1 = a,\ x_2 = b.$

2. Lösung. Es sei

$$a = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},\ b = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

Dann folgt durch Addition und Multiplikation:

$$a + b = -p,\ ab = -q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Hierin liegt der Satz ausgesprochen: Die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung $x^2 + px = q$ ist gleich $-p$, das Produkt gleich $-q$. Mit Hülfe dieses Satzes kann man die Bedingungen angeben, welche erfüllt sein müssen, damit eine quadratische Gleichung zwei positive (zwei negative, eine positive und eine negative) Wurzeln ergebe. Wichtiger ist er als Probe der Richtigkeit einer Lösung.

5. Beispiel. $5x^2 - 19x = -18.$

Die Gleichung ist noch nicht geordnet. Dividiert man durch 5, so folgt:

$$x^2 - \frac{19}{5}x = -\frac{18}{5}.$$

Ergebnis. $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{9}{5}.$

Probe. $x_1 x_2 = \frac{18}{5},\ x_1 + x_2 = \frac{19}{5}.$

6. Beispiel. $7x^2 + 12x = 20.$

Ergebnis. $x_1 = \frac{-6 + 4\sqrt{11}}{7},$

wo der $\sqrt{11}$ der positive Wert beigelegt sein mag.

Probe. Durch Ausrechnung ergiebt sich:

$$7x_1^2 = \frac{212 - 48\sqrt{11}}{7},\ 12x = \frac{-72 + 48\sqrt{11}}{7}.$$

Diese Probe gilt für beide Werte x_1 wie x_2.

7. Beispiel. $x^3 = 1$ . . . . (70)

Subtrahiert man 1, so folgt:

$$x^3 - 1 = 0,$$

mithin nach § 8, Gl. (19)

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Also mufs sein entweder $x - 1 = 0$ oder $x^2 + x + 1 = 0$.

Ergebnis.

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Bei Anstellung der Probe findet man

$$x_2^2 = x_3,\ \text{dann}\ x_2^3 = x_2 x_3 = 1.$$

8. Beispiel. $\frac{2x + 3}{4x + 1} - \frac{3x - 1}{2x - 5} = 1.$

Man erhält die Gleichung:

$$16x^2 - 15x = -9,$$

und die Lösung: $x = \frac{15 \pm 3i\sqrt{39}}{32}.$

Probe. Es wird nach Einsetzung des gefundenen Wertes und nach Wegschaffung der Doppelbrüche gefunden:

$$\frac{2x + 3}{4x + 1} = \frac{63 + 3i\sqrt{39}}{2(23 + 3i\sqrt{39})}.$$

Erweitert man mit $23 - 3i\sqrt{39}$, so folgt:

$$\frac{2x + 3}{4x + 1} = \frac{45 - 3i\sqrt{39}}{44}.$$

Ebenso ergiebt sich nach Erweiterung mit $65 + 3i\sqrt{39}$

$$\frac{3x - 1}{2x - 5} = \frac{1 - 3i\sqrt{39}}{44}.$$

Die Probe stimmt also. Aufgaben wie Beispiel 8 enthalten fast alle Bruchregeln zur erneuten Übung und bringen auch sonst eine grofse Zahl wichtiger algebraischer Methoden in Erinnerung. Die Probe gilt für beide Werte von x, die sich nur durch das willkürliche Vorzeichen von $\sqrt{39}$ unterscheiden.

Bei der ersten Durchnahme sind 7 und 8 zu übergehen.

9. Beispiel.

$$5\sqrt{7x+4} - 3\sqrt{8x+1} = 10.$$

$\sqrt{7x+4}$ ist eine Zahl, welche mit sich selbst multipliziert $7x+4$ giebt, also eine neue Unbekannte. Ebenso $\sqrt{8x+1}$. Daher setzen wir:

$$y = \sqrt{7x+4},\ z = \sqrt{8x+1}$$

und finden: $7x+4=y^2,\ 8x+1=z^2,\ 5y-3z=10.$

Dies ist ein System geordneter Gleichungen mit drei Unbekannten.

Wir finden: $x = \frac{y^2-4}{7},\ z = \frac{5y-10}{3},$

daher $103y^2 - 700y = -925.$

Hieraus folgt: $y_1 = 5,\ y_2 = \frac{185}{103};$

daher die Lösung: $y_1 = 5,\ z_1 = 5,\ x_1 = 3;$

$$y_2 = \frac{185}{103},\ z_2 = -\frac{35}{103},\ x_2 = -\frac{1173}{103}.$$

Die Aufgabe wird also gelöst durch die beiden Dreiheiten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2. Dabei wird das Vorzeichen der ursprünglich als Wurzelgröfse auftretenden Unbekannten ohne Zweideutigkeit bestimmt.

10. Beispiel. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x-1} = 1.$

Anleitung.

$$y^2 = 2x+1,\ z^2 = 3x-1,\ y+z = 1.$$

Man findet die ***Lösung:***

$$x = 7 - 2\sqrt{11},\ y = -2 + \sqrt{11},\ z = -3 + \sqrt{11},$$

wo dem Zeichen $\sqrt{11}$ überall der positive oder überall der negative Wert zu erteilen ist.

11. Beispiel. Zwei Röhren füllen einen Behälter, die eine drei Stunden früher als die andere. Sind beide geöffnet, so wird der Behälter in zwei Stunden gefüllt. In wieviel Stunden füllt jede Röhre allein fliefsend den Behälter?

Anleitung. Angenommen, der Behälter fasse *a cbm* Wasser; die erste Röhre möge ihn in x Stunden, die zweite also in $x+3$

Stunden füllen. Dann erhält man die Gleichung:

$$\frac{a}{x} + \frac{a}{x+3} = \frac{a}{2}.$$

Die Lösung ist $x = 3$; eine zweite $x = -2$ kann allenfalls gedeutet werden, entspricht jedoch nicht dem Wortlaute der Aufgabe.

12. Beispiel. Die Höhe eines im luftleeren Raume mit der Anfangsgeschwindigkeit v emporsteigenden Körpers beträgt nach t Sekunden ($g = 9,81\,m$) $h = vt - \frac{1}{2} t^2 g$ . . . . (71)

Ist t unbekannt, h gegeben, so erhält man eine quadratische Gleichung, deren beide Lösungen eine physikalische Bedeutung haben:

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2gh}}{g}. \quad \text{. . . . . . (72)}$$

Ist $v^2 = 2gh$, so fallen die beiden Lösungen zusammen, da nach $t = \frac{v}{g}$ Sekunden der Körper seine gröſste Steighöhe erreicht. Ist $v^2 < 2gh$, so wird die Lösung imaginär, d. h. physikalisch unmöglich.

13. Beispiel. Ein Stein fällt in einen Brunnen, und man hört nach T Sekunden das Aufschlagen auf den Wasserspiegel. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Schallgeschwindigkeit $a = 333\,m$ berücksichtigt, aber der Luftwiderstand beim Hinabfallen auſser acht gelassen wird.

Anleitung. Die Fallzeit dauere x, die Zeit, die der Schall gebraucht, dauere y Sekunden, und die Tiefe des Brunnens sei z m. Dann ist

$$z = \frac{1}{2} x^2 g, \; z = ay, \; x + y = T.$$

14. Beispiel. Ein Brunnen von 25 m Tiefe soll cylindrisch ausgemauert werden. Die lichte Weite (der innere Durchmesser) soll $1^1/_2$ m betragen. Wie stark darf die Brunnenwand werden, wenn nur 34,558 *cbm* Steine zur Verfügung stehen?

Anleitung. Der Inhalt eines Cylinders von der Höhe h und dem Grundkreisradius r beträgt $J = r^2 h \pi$. — Lösung: 35 *cm*.

15. Beispiel. Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist um 2 m gröſser als die andere und um 16 m kleiner als die Hypotenuse. Man bestimme das Dreieck (40, 42, 58).

Zahlreiche ähnliche Aufgaben bildet man aus den Gleichungen:

$$x = a^2 - b^2; \; y = 2ab; \; z = a^2 + b^2. \quad \text{. . . . . (73)}$$

Sind a, b beliebige Zahlen, so sind x, y Katheten und z Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

16. Beispiel. Jemand zahlte am 1. Dezember 1888 an eine Sparkasse 200 ℳ, am 1. Dezember 1889 weitere 172 ℳ und erhielt am 1. Dezember 1890 mit Zinsen und Zinseszinsen 395 ℳ 20 ₰ herausgezahlt. Wie hoch war der Zinsfuſs? — 4 %.

17. Beispiel. Zwei Himmelskörper mit den Massen m und M finden sich in gegenseitigem Abstande von a Erdradien. Man gebe denjenigen Punkt auf ihrer geradlinigen Entfernung an, in welchem die anziehenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Anleitung. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze hat die anziehende Kraft einer Masse m im Abstande r den Ausdruck $\frac{fm}{r^2}$, wo f einen unveränderlichen Zahlenfaktor bedeutet.

18. Beispiel. Von einem Dreiecke sind zwei Seiten $b = 14$, $c = 15$ und der Inhalt $I = 84$ gegeben. Man berechne die dritte Seite.

Lösung. Sind die drei Seiten eines Dreiecks a, b, c und der Inhalt I, so besteht die Gleichung:

$$16 I^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \quad . \quad (73)$$

Die Lösung ergiebt:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{(bc + 2I)(bc - 2I)}, \quad . \quad (74)$$

in unserem Falle $a_1 = 13$, $a_2 = \sqrt{673}$. Die negativen Werte haben keinen geometrischen Sinn. $I > \frac{1}{2}bc$ führt zu einer unmöglichen Aufgabe, $I = \frac{1}{2}bc$ zu einem rechtwinkligen Dreieck. Dasselbe ist also dasjenige gröſsten Inhalts. Die Probe für Aufgabe 18 liefert die Heronische Formel. Andere Zahlenbeispiele liefern:

$a = 21,\ b = 20,\ c = 13,\ I = 126,$
$a = 25,\ b = 17,\ c = 28,\ I = 210,$
$a = 5,\ b = 5,\ c = 6,\ I = 12,$
$a = 40,\ b = 25,\ c = 39,\ I = 468.$

19. Beispiel. Eine gegebene Zahl a soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daſs die Summe der dritten Potenzen derselben die Zahl b ergiebt.

Anleitung. Nennt man den einen Summanden x, so ist der andere $a - x$. Daher die Gleichung:

$$x^3 + (a - x)^3 = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Einfacher und symmetrischer wird die Lösung, wenn man den einen Summanden mit $\frac{a}{2} - x$, also den andern mit $\frac{a}{2} + x$ bezeichnet. Auch die Gleichungen:

$$\left(\frac{a}{2}-x\right)^4+\left(\frac{a}{2}+x\right)^4=b;\ \left(\frac{a}{2}-x\right)^5+\left(\frac{a}{2}+x\right)^5=b\ .\ (76)$$

sind in dieser Weise lösbar. Man findet dieselben oft als Gleichungen mit zwei Unbekannten: $x+y=a$; $x^4+y^4=b$, behandelt. Ist statt der Summe eine Differenz gegeben, so ist es oft zweckmäfsig, die Form $x+\frac{a}{2}$ und $x-\frac{a}{2}$ aufzustellen, da alsdann die Differenz dieser Ausdrücke a ist.

20. Beispiel. Die Gleichung:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\quad . \quad . \quad (77)$$

kann auf quadratische zurückgeführt werden, indem man durch x^2 dividiert und dann die neue Unbekannte

$$x+\frac{1}{x}=y\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

einführt. Dann wird zunächst

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

und weiter $\quad ay^2+by+c-2a=0.$

Hat man y gefunden, so liefert (78) zu jedem y zwei Werte x. Die Gleichung (77) hat 4 Wurzeln. Um passende Zahlenbeispiele zu erhalten, bilde man das Produkt:

$$(x-\alpha)(\alpha x-1)(x-\beta)(\beta x-1)=0,$$

wo α und β beliebig angenommen werden können. Gleichungen von der Form (77) nennt man reciproke. Ist $ab=1$, so nennt man a den reciproken Wert von b und umgekehrt.

§ 17. Logarithmen.

Wir haben bereits im § 15 [Gl. (57)] den Begriff der gebrochenen Potenz $a^{\frac{1}{2}}$ erhalten. Wir fanden dieselbe als mit $\sqrt{a}$ begrifflich übereinstimmend. Da wir nun auch ein Verfahren kennen gelernt haben, die Quadratwurzel mit jeder beliebigen Annäherung auszurechnen, so darf uns $a^{\frac{1}{2}}$ als eine völlig bestimmbare Gröfse gelten. Nehmen wir weiter an, dafs wir der Quadratwurzel immer ihren positiven Wert erteilen. Unter dieser Beschränkung hat auch $a^{\frac{1}{4}}$ einen bestimmten Wert. Denn $a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}}$, und somit ist $a^{\frac{1}{4}}$ die Quadratwurzel aus $a^{\frac{1}{2}}$. So kann man durch fortgesetzte Quadratwurzelausziehung die Gleichungen erhalten:

$$10^{\frac{1}{2}}=3{,}1622;\quad 10^{\frac{1}{8}}=1{,}3335;\quad 10^{\frac{1}{32}}=1{,}0746$$
$$10^{\frac{1}{4}}=1{,}7783;\quad 10^{\frac{1}{16}}=1{,}1548;\ \text{oder}\ 10^{0{,}03125}=1{,}0746.$$

Berechnen wir nun 10^n, wenn n die Werte enthält:

$$n = 0, \frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \frac{3}{32}, \ldots \frac{32}{32},$$

so folgt, dafs in der Gleichung $10^n = a$ die Zahl a stets wachsend Zahlenwerte zwischen 1 und 10 durchläuft, während n durch jene Stufen von 0 zu 1 fortschreitet. Hätten wir statt 32 eine viel gröfsere Zahl genommen, so würden die Stufen entsprechend enger geworden sein. Hierdurch gewinnen wir die vorläufig genügende Überzeugung: Zu jeder Zahl a zwischen 1 und 10 gehört eine bestimmte Zahl n zwischen 0 und 1, welche die Gleichung erfüllt:

$$10^n = a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (79)$$

Dann heifst n der Logarithmus von a. Das Zeichen des Logarithmus ist *log* (ohne Punkt). Man hat also:

$$10^{\log a} = a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (80)$$

Logarithmus einer Zahl ist diejenige Zahl, welche angiebt, in welche Potenz 10 erhoben werden mufs, damit die ursprüngliche Zahl herauskommt.

Folgende Gleichungen sagen also dasselbe aus:

$10^0 = 1$ und $\log 1 = 0$; $10^2 = 100$ und $\log 100 = 2$;
$10^1 = 10$ „ $\log 10 = 1$; $10^3 = 1000$ „ $\log 1000 = 3$.

In den Tafeln finden wir die Angabe $\log 3 = 0{,}47712$. Dieselbe ist also gleichbedeutend mit:

$$10^{0{,}47712} = 3,$$

folglich nach Multiplikation mit Potenzen von 10:

$$10^{1{,}47712} = 30 \text{ oder } \log 30 = 1{,}47712;$$
$$10^{2{,}47712} = 300 \;\text{„}\; \log 300 = 2{,}47712.$$

Ebenso durch Division mit Potenzen von 10 (oder Multiplikation mit 10^{-1}, 10^{-2} u. s. w.):

$$10^{0{,}47712 - 1} = 0{,}3 \text{ oder } \log 0{,}3 = 0{,}47712 - 1;$$
$$10^{0{,}47712 - 2} = 0{,}03 \;\text{„}\; \log 0{,}03 = 0{,}47712 - 2 \text{ u. s. w.}$$

Jeder Logarithmus kann dargestellt werden als Summe aus einer ganzen (positiven oder negativen) Zahl und einem Decimalbruch, dessen Ganzes null ist. Die ganze Zahl heifst Charakteristik, der Decimalbruch heifst Mantisse. Aus dem Vorigen ergiebt sich die Regel: Für eine $n$stellige Zahl ist die Charakteristik $n - 1$, für einen Decimalbruch, der mit n Nullen von links her beginnt, ist sie $-n$. Die fünfstelligen Logarithmentafeln geben nur die Mantissen der vierstelligen Zahlen. Man kann jedoch auch zu fünfstelligen Zahlen die Mantissen und zu nicht

genau in den Tafeln enthaltenen Mantissen die zugehörenden fünfstelligen Zahlen finden. Das Verfahren erhellt aus folgenden

Beispielen: 1) $x = 103{,}47$. Gesucht $log\ x$.

Die Tafeln ergeben:

$$log\ 103{,}4 = 2{,}01452;\ log\ 103{,}5 = 2{,}01494.$$

Der Zuwachs beträgt 42 Einheiten der letzten Decimale (abgekürzt *Edld*) und heifst die Hauptdifferenz. Jetzt bilden wir folgenden Schlufs:

Zuwachs 10 *Edld* bei der Zahl giebt Zuwachs 42 *Edld* beim *log*, also:
„ 1 „ „ „ „ „ „ 4,2 „ „ „
„ 7 „ „ „ „ „ „ 29,4 „ „ „

29 ist hinzuzufügen; also ist $log\ x = 2{,}01481$.

In dem Zuwachs 29,4 ist 4 immer zu vernachlässigen oder die Vorstelle, z. B. bei 35,6 in 36, zu erhöhen (niemals als „sechste" Stelle zu verwenden).

2) $log\ x = 0{,}28391$.

Man entlogarithmiere (vorzuziehen dem Ausdrucke *num log*). Der zunächst kleinere Logarithmus ist 0,28375, also kleine Differenz 16 *Edld*. Dazu die Zahl $x = 1{,}922$. Zur Zahl 1,923 gehört der Logarithmus 0,28398, also Hauptdifferenz 23 *Edld*. Daher der Schlufs:

Zuwachs 10 *Edld* bei der Zahl giebt Zuwachs 23 *Edld* beim *log*
„ $\frac{10}{23}$ „ „ „ „ „ „ 1 „ „ „
„ $\frac{160}{23} = 7$ „ „ „ „ „ 16 „ „ „

$$x = 1{,}9227.$$

Auch hier ist das Ergebnis abzurunden; „sechste" Stellen zu berechnen wäre durchaus unzulässig. Durch die den Tafeln zu entnehmenden Angaben unter *P. P.* (partes proportionales) kann die obige Rechnung vereinfacht werden.

Die zur Logarithmierung und Entlogarithmierung erforderlichen kleinen Rechnungen gehören in die Nebenrechnung, nicht in die Reinschrift, sind aber vom Anfänger sorgfältig zu üben.

§ 18. Logarithmische Sätze.

$$log\ (a\,b) = log\ a + log\ b \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (81)$$

Beweis. $10^{log\ a} = a$, $10^{log\ b} = b$; daher $10^{log\ a + log\ b} = a\,b$.

Nach der Erklärung des Logarithmus ist also $log\ a + log\ b$ der Logarithmus von ab, was zu beweisen war. Ebenso wird:

$$log\,(abcd) = log\,a + log\,b + log\,c + log\,d \text{ u. s. w.} \quad (82)$$

$$log\,\frac{a}{b} = log\,a - log\,b. \quad \ldots\ldots \quad (83)$$

Beweis wie vorhin: $10^{log\,a - log\,b} = \frac{a}{b}$.

$$log\,(a^n) = n\,log\,a. \quad \ldots\ldots \quad (84)$$

Aus $10^{log\,a} = a$ folgt durch Erheben in die n^{te} Potenz $10^{n\,log\,a} = a^n$. Logarithmiert man nun die Gleichung:

$$x^n = a,$$

so folgt $n\,log\,x = log\,a$, daher $log\,x = \frac{log\,a}{n}$. Erinnern wir nun an die Gleichungen (9) und (10), so folgt, indem für x die andere Schreibart eingeführt wird:

$$log\,\sqrt[n]{a} = \frac{log\,a}{n}. \quad \ldots\ldots \quad (85)$$

Es mufs daran erinnert werden, dafs wir uns nur mit Logarithmen positiver Zahlen befassen. Daher fällt jede Vieldeutigkeit der Wurzelzeichen für uns fort, wenn wir uns mit ihrer logarithmischen Berechnung beschäftigen. Man hüte sich vor den beiden falschen Regeln:

$$log\,(a + b) = log\,a + log\,b \text{ und } log\,(a - b) = log\,a - log\,b.$$

Sobald in einem Ausdrucke die Vorzeichen + oder — vorkommen, kann nicht direkt logarithmiert werden.

Übungen.

$$\left.\begin{array}{r} log\,2 = 0{,}30103 \\ log\,3 = 0{,}47712 \\ log\,4 = 0{,}60206 \\ log\,5 = 0{,}69897 \end{array}\right\} + \qquad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} log\,2 = 0{,}30103 \\ log\,5 = 0{,}69897 \end{array}\right\} - \end{array}$$

$$\overline{log\,120 = 2{,}07918} \qquad \overline{log\,0{,}4 = 0{,}60206} - 1.$$

$$\left.\begin{array}{r} log\,1 = 0{,}00000 \\ log\,3 = 0{,}47712 \end{array}\right\} -$$

$$\overline{log\,0{,}33333 = 0{,}52288} - 1.$$

$$x = \sqrt[7]{a\sqrt[5]{b} + c^2 d\,\sqrt[4]{a}.}$$

Man setze $y = a\sqrt[5]{b}$, $z = c^2 d\,\sqrt[4]{a}$. Den Gang der Rechnung zeigt folgende Anweisung:

$$\left.\begin{array}{r} log\,a = \\ \frac{1}{5}\,log\,b = \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{r} 2\,log\,c = \\ log\,d = \\ \frac{1}{4}\,log\,a = \end{array}\right\} + \qquad \begin{array}{c} y + z = u. \\ log\,x = \frac{1}{7}\,log\,u. \\ x = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} log\,y = \\ y = \end{array} \qquad \begin{array}{r} log\,z = \\ z = \end{array}$$

Die Oberfläche eines Cylinders ist $S = 2r^2\pi + 2rh\pi$, der körperliche Inhalt desselben ist $\Delta = r^2 h\pi$, wenn h die Höhe und r den Grundkreisradius bedeutet.

Ebenso erhält man für den Kegel (M = Mantel, s = Seite) $S = r^2\pi + sr\pi$; $M = sr\pi$; $\Delta = \frac{1}{3} r^2 h\pi$; $s^2 = r^2 + h^2$.

Die Oberfläche der Kugel ist $S = 4r^2\pi$, der körperliche Inhalt $\Delta = \frac{4}{3} r^3\pi$, die sphärische Oberfläche einer Kugelzone ist $2rh\pi$, wenn h die Höhe der Zone bedeutet. Dieselbe Formel gilt für die Kugelkappe mit der Höhe h. Der körperliche Inhalt ist gegeben durch die Formel $\Delta = rh^2\pi - \frac{1}{3} h^3\pi$.

Ein Körper vom specifischen Gewichte s wiegt $s\Delta$ *kg*, wenn sein körperlicher Inhalt Δ in Kubikdecimetern angegeben ist. Hieraus ergeben sich Übungsaufgaben in reicher Fülle. Wenn man z. B. verlangt: den Grundkreisradius eines Cylinders zu bestimmen, dessen Durchmesser 10mal so grofs ist als die Höhe, und dessen Inhalt 1000 *cbm* sein soll, so findet man $r = x$, $25 x^3 \pi = 1000$ und nach Logarithmierung $3 \log x = \log 1000 - \log 25 - \log \pi$, endlich $x = 11{,}675$ *m*.

Andere sehr einfache Aufgaben erhält man dadurch, dafs man die Logarithmen gewisser Primzahlen als gegeben ansieht und daraus die Logarithmen anderer Zahlen, z. B. derjenigen des ersten Hundert bestimmt.

Dritter Lehrgang.

§ 19. Potenzen und Wurzeln. Logarithmen.

Wie wir Multiplikationsgesetze aufgestellt haben, so können wir auch Additionsgesetze aufstellen. So ist $a + b = b + a$; ferner

$$a + (b + c) = b + (a + c) = c + (a + b) = a + b + c.$$

Hieraus folgt durch Ausdehnung auf vier und mehr Summanden: Man ist berechtigt, aus beliebigen Summanden Untersummen zu bilden und aus den Untersummen die Hauptsumme hervorgehen zu lassen.

Wir erklären dann die Zahlen durch die Gleichungen $1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 1 = 4$ u. s. w. Hierdurch sehen wir uns in den Stand gesetzt, Gleichungen wie $2 \cdot 2 = 4$; $5 + 7 = 12$ strenge zu beweisen. Die Null wird erklärt durch die Gleichung $a + 0 = a$. Sind so die Zahlwörter erklärt, so besteht das Zählen darin, eine Reihe gleichartiger Dinge mit den Zahlwörtern zu begleiten.

Einziger Grundsatz der Addition ist: Die Anzahl der gezählten Dinge ist unabhängig von der Art der Zählung.

Im vorigen Paragraphen haben wir gelernt, mit Hülfe der Logarithmen die Gleichung $x^n = a$ aufzulösen. Hiermit sind wir den Wurzelgröſsen näher getreten und müssen jetzt darauf eingehen, dieselben nach ihrem Begriffe und ihrer Wertbestimmung genauer zu betrachten. Beginnen wir mit der Kubikwurzel.

Die Gleichung $x^3 = a$ hat immer eine Lösung, wenn a eine positive oder negative Zahl bedeutet. Man überzeugt sich hiervon durch Probieren oder durch Berechnung mit Hülfe der Logarithmen. Ist a negativ, so wird auch x negativ. Setzt man dann $x = -y$, so kann man die negativen Vorzeichen vermeiden. Ist a eine positive ganze Zahl, so liefert die Gleichung $x^3 = a$ entweder eine ganze Zahl als Ergebnis oder eine irrationale Zahl. Diese Irrationalität ist aber gänzlich verschieden von der bei Ausziehung der Quadratwurzel entstehenden, und wenn a kein genauer Kubus, sondern irgend eine andere ganze Zahl ist, so kann $\sqrt[3]{a}$ weder durch einen Bruch, noch durch einen aus Quadratwurzeln gebildeten Ausdruck genau dargestellt werden. Zur näherungsweisen Berechnung kann man nachstehendes Verfahren anwenden.

Zu berechnen sei: $$x^3 = a. \qquad (86)$$

Dann setzen wir, wenn m^3 die nächst a gelegene Kubikzahl ist,

$$y = x - m. \qquad (87)$$

Es ist $y < 1$ und folgt den Gröſsengesetzen der echten Brüche, deren höhere Potenzen stets kleiner werden. Da nun $x^3 = a$ ist, so können wir eine möglichst hohe Potenz von y lediglich durch x und x^2 ausgedrückt erhalten. Sei gefunden:

$$y^\lambda = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \qquad (88)$$

dann wird durch Multiplikation mit (87)

$$y^{\lambda+1} = (-m a_0 + a a_2) + (a_0 - m a_1) x + (a_1 - m a_2) x^2. \quad (89)$$

Setzen wir nun $y^\lambda = y^{\lambda+1} = 0$, so erhalten wir für die Unbekannten x und x^2 zwei Gleichungen, welche dieselben durch Näherungswerte in Bruchform bestimmen. Löst man die Gleichung (88) unter der Annahme $y^\lambda = 0$, so erhält man einen durch eine Quadratwurzel mitbestimmten Näherungswert. Für

$$x^3 = 2 \text{ ist } y = x - 1.$$

$$x^4 = 2x,\ x^5 = 2x^2,\ x^6 = 4,\ x^7 = 4x \text{ u. s. w.}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} y^2 &= \quad 1 - 2x + \ \ x^2, & y^6 &= -\ \ 35 + \ \ 24x + \ \ \ 3x^2,\\ y^3 &= \quad 1 + 3x - 3x^2, & y^7 &= \quad\ \ 41 - \ \ 59x + \ \ 21x^2,\\ y^4 &= -7 - 2x + 6x^2, & y^8 &= \qquad 1 + 100x - \ \ 80x^2,\\ y^5 &= \ \ 19 - 5x - 8x^2, & y^9 &= -161 - \ \ 99x + 180x^2. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten folgt $x = \frac{635 + 4y^9 + 9y^8}{504} \sim \frac{635}{504}$. Da $x = 1{,}26$, so ist $y < 0{,}26$, und man kann nun durch logarithmische Rechnung feststellen, wieviel Stellen wirklich richtig sind, indem man $\frac{4y^9 + 9y^8}{504}$ näherungsweise bestimmt. Rascher wäre man ans Ziel gelangt, wenn man y^2, y^4, y^8 u. s. w. berechnet hätte. Aus $y^8 = 0$ ergiebt sich die Näherung: $x = \frac{25 + \sqrt{645}}{40}$.

Vorstehend gekennzeichnetes Näherungsverfahren ist auf alle algebraischen Gleichungen anwendbar und übertrifft die meisten andern Näherungsmethoden durch Einfachheit und schnelle Wirkung. Für die quadratischen Gleichungen liefert es Ergebnisse, die zahlentheoretisch häufig von hervorragender Wichtigkeit sind, z. B. für $x^2 = 2$ die Näherungsbrüche $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, welche die Pellsche Gleichung lösen.

Sei nun a eine positive Zahl, α eine zweite positive Zahl von der Art, dafs $\alpha^3 = a$ ist. Setzen wir nun, um die Gleichung $x^3 = a$ zu lösen, $x = \alpha y$, so wird $\alpha^3 y^3 = a$, also $y^3 = 1$ gefunden. Diese Gleichung haben wir nun bereits (70) kennen gelernt. Mithin hat die Gleichung $x^3 = a$ drei Lösungen:

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = \alpha\,\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_3 = \alpha\,\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Fragen wir nun nach dem Werte der Ausdrücke $a^{\frac{1}{3}}$ und $a^{\frac{2}{3}}$, so ist nach dem Potenzgesetz (54)

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a.$$

Folglich ist $a^{\frac{1}{3}}$ völlig gleichbedeutend mit $\sqrt[3]{a}$. Da nun

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

so ist
$$a^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2.$$

Andererseits ist $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^2$, daher auch

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Diese Ergebnisse lassen sich sofort verallgemeinern. Es sei der Ausdruck $a^{\frac{p}{q}}$ zu bestimmen, wo p und q ganze Zahlen seien.

Es ist, wenn wir $a^{\frac{1}{q}}$ $q$mal als Faktor setzen:

$$a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{q}} = a,$$

also $$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}.$$

Ferner ist, wenn man $a^{\frac{1}{q}}$ $p$mal als Faktor setzt,

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Andererseits ist aber, wenn man $a^{\frac{p}{q}}$ $q$mal als Faktor setzt, das Ergebnis a^p. Daher: $$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

Demnach können wir hier zu den Sätzen Gl. (54), (55), (56) einen vierten hinzufügen: Man zieht aus einer Potenz die Wurzel, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert. Andererseits hat man die Gleichung: $$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

Wenden wir uns der allgemeinen Wertbestimmung zu, so wird die Gleichung: $$x^n = a,$$
wenn a eine positive Zahl ist, immer durch eine einzige positive Zahl x gelöst. Diese Zahl finden wir durch Logarithmierung oder durch ein dem bei der Kubikwurzel angewandten entsprechendes Verfahren. Sei diese positive Zahl α, also $\alpha^n = a$, so setzen wir wieder $x = \alpha y$ und gelangen zu der Gleichung:

$$y^n = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

Diese Gleichung ist die binomische oder die Kreisteilungsgleichung. Vorläufig mag bemerkt werden, dafs dieselbe n Lösungen darbietet, von denen bei geradem n nur zwei, bei ungeradem n nur eine reell ist: $y = \pm 1$, $y = 1$. Daher sind die in (91) vorkommenden Ausdrücke nicht eindeutig, sondern besitzen q (im allgemeinen verschiedene) Werte. Für $n = 4$ erhält man:

$$x_1 = 1, \; x_2 = -1, \; x_3 = i, \; x_4 = -i.$$

Betrachten wir die Gleichung:

$$x^{mn} = a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

so folgt durch Ausziehung der m^{ten} Wurzel $x^n = \sqrt[m]{a}$ und dann durch Ausziehung der n^{ten} Wurzel:

$$x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Da man auch umgekehrt hätte verfahren können, so entsteht die Doppelgleichung:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Diesen Satz bewahrheitet man durch logarithmische Rechnung. Denn es ist: $\log x = \frac{1}{mn} \log a = \frac{1}{m} \frac{\log a}{n} = \frac{1}{n} \frac{\log a}{m}$.

Ebenso kann man ihn durch die gebrochenen Potenzexponenten bestätigen. Wegen der Mehrdeutigkeit der Wurzelgröfsen in Gl. (94) ist wie bei (91) Vorsicht geboten, um nicht bei ungeschickter Rechnung zu widersprechenden Ergebnissen zu gelangen.

Aus den Gleichungen:

$$x^m = a, \quad y^m = b \quad \text{oder} \quad x = \sqrt[m]{a}, \quad y = \sqrt[m]{b},$$

folgt durch Multiplikation und Division:

$$(xy)^m = ab, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad xy = \sqrt[m]{ab}, \quad \frac{x}{y} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Daher:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}; \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}. \quad \ldots \quad (95)$$

Diese Sätze bestätigt man einfach durch Logarithmierung. Denn es ist:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{m} \log(ab) = \frac{1}{m} \log a + \frac{1}{m} \log b; \\ \frac{1}{m} \log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{m} \log a - \frac{1}{m} \log b. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (96)$$

Bezüglich der Mehrdeutigkeit der Ausdrücke in (95) gilt dasselbe wie oben. Es empfiehlt sich daher, unter a, b u. s. w. nur positive Zahlen und unter den Wurzelgröfsen nur die zugehörenden ebenfalls positiven Zahlen zu verstehen.

Übungen.

1) $x^4 = 16$; $x^2 = \pm 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2i$, $x_4 = -2i$.

Daher: $\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4}$ oder $\sqrt{-4}$.

In diesem Falle läfst sich die Mehrdeutigkeit völlig berücksichtigen.

2) $x^6 = 729$; $x^3 = 27$, $x^2 = 9$.

Daher:

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Hier haben wir uns lediglich auf die positiven Lösungen beschränkt, obschon wir mit Hülfe von Gl. (70) die vollständige Lösung hätten finden können.

3) $x^{12} = 4096$; $x^6 = 64$, $x^3 = 8$, $x = 2$.

$x^{12} = 4096$; $x^4 = 16$, $x^2 = 4$, $x = 2$.

$$\sqrt[12]{4096} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{4096}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096}}} = 2.$$

4) $x^8 = 6561;\ x^4 = 81,\ x^2 = 9,\ x = 3.$

$$\sqrt[8]{6561} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = 3.$$

5) $b\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b^3 a};\ b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{a b^2}.$

Diese Aufgaben löst man nach (95) oder einfacher durch Gleichungen, etwa:

$$x = b\sqrt[3]{a},\ x^3 = b^3 a;\ \text{daher } x = \sqrt[3]{b^3 a}.$$

6) $x = (2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}.$

Dann ist $x^2 = (7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3}) = 1$; also: $x = 1$.

Solche Aufgaben kommen in der Stereometrie und Trigonometrie nicht selten vor.

§ 20. Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten.

1. Fangen wir mit dem Beispiel an:

$$\left.\begin{aligned} a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 + 2a_3 x + 2a_4 y + a_5 = 0;\\ b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2 + 2b_3 x + 2b_4 y + b_5 = 0,\end{aligned}\right\} \quad (97)$$

so haben wir die beiden allgemeinsten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten vor uns. Um die Entfernung einer Unbekannten zu bewirken, schlagen wir folgendes Verfahren ein. Wir ordnen beide Gleichungen nach Potenzen von x und erhalten:

$$a_0 x^2 + 2(a_1 y + a_3)x + a_2 y^2 + 2a_4 y + a_5 = 0;$$
$$b_0 x^2 + 2(b_1 y + b_3)x + b_2 y^2 + 2b_4 y + b_5 = 0.$$

Dann behandeln wir diese Gleichungen, als wären es zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und x^2. Endlich quadrieren wir den Ausdruck für x und erhalten die Gleichung, welche zur Bestimmung von y führt. Sie ist vierten Grades und daher im allgemeinen für uns nicht methodisch lösbar. Eine solche Lösung ist dagegen möglich, wenn die Koefficienten der Potenzen y und y^3 verschwinden oder wenn die Gleichung reciprok ist.

2. Andererseits ist folgende Gleichungsform sofort einer Lösung zugänglich:

$$\left.\begin{aligned} (a_0 x + a_1 y)^2 + m(a_0 x + a_1 y) + n = 0;\\ b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2 + 2b_3 x + 2b_4 y + b_5 = 0,\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

indem man die erstere als einfache quadratische Gleichung behandelt.

3. Zwei Gleichungen von der Form:

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 = a_3;$$
$$b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2 = b_3,$$

werden dadurch behandelt, dafs man die linken und rechten Seiten

durch einander dividiert und dann $\frac{x}{y} = z$ einführt. Man findet:

$$\frac{a_0 z^2 + 2 a_1 z + a_2}{b_0 z^2 + 2 b_1 z + b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

4. Man bemerke, dafs man in allen vorausgehenden Beispielen stets Wertepaare (nicht einzelne Werte für x oder y) als Lösung erhält. Diese Wertepaare genügen nur in ihrer bestimmten Zuordnung beiden gegebenen Gleichungen. Von diesem Verhalten machen Gleichungen wie: $\left.\begin{array}{r} x + y = a \\ xy = b \end{array}\right\}$ also $(x - y)^2 = a^2 - 4b$

eine Ausnahme, insofern sie nur ein einziges Wertepaar darzubieten scheinen. Diese Ausnahme erklärt sich durch die symmetrische Form der gegebenen Gleichungen.

5. Manche Gleichungen kann man durch einen mehr oder minder leicht sich ergebenden Kunstgriff lösen. Ist gegeben:

$$x + y = a; \; x^3 + y^3 = b,$$

so erhebe man die erstere in den Kubus und subtrahiere die zweite, wodurch ein Ausdruck für xy gefunden wird. [Siehe auch Gl. (75).] Auch kann man $x^3 + y^3$ in ein Produkt zerlegen. Dieselben Kunstgriffe gelten für die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a, \\ x^5 + y^5 = b; \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y = a, \\ x^5 - y^5 = b; \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a, \\ x^4 - y^4 = b; \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = a, \\ x^4 + y^4 = b. \end{array}\right\}$$

Bei der Gleichung $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = a$ wird man beiderseits 2 addieren und dann die Quadratwurzel ziehen.

6. Um auch ein methodisches Verfahren kennen zu lernen, wollen wir die Gleichungen betrachten:

$$x^3 + a x^2 y = m; \; y^3 + b x y^2 = n.$$

Sehen wir hier die einzelnen Potenzen von x als Unbekannte an, so haben wir 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten: x, x^2, x^3. Multiplizieren wir jede mit x, so erhalten wir:

$$x^4 + a x^3 y = m x; \; y^3 x + b x^2 y^2 = n x,$$

und haben nun 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten x, x^2, x^3, x^4. Die Lösung nach dem in § 14 gelehrten Verfahren liefert diese Potenzen ausgedrückt durch y und dann eine Gleichung neunten Grades zur Bestimmung von y. Ist $a = b = 3$, so ist die Auflösung leicht. Die Gleichungen können auch nach der Methode 3. gelöst werden.

7. Die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \\ y^2 + (a - r - x)^2 = r^2, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

treten in der analytischen Geometrie auf. Sie besitzen ein Wertepaar $x = a$, $y = 0$, welches aber doppelt zu rechnen ist. Dies sieht man ein, wenn man statt der zweiten Gleichung die allgemeinere $y^2 + (m - x)^2 = r^2$ eintreten läſst.

Die eigentliche Quelle der Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten ist die analytische Geometrie. Die Wichtigkeit sonstiger mehr auf Kunstgriffen beruhender Beispiele ist vielfach überschätzt worden.

§ 21. Die arithmetischen Reihen.

Eine *Reihe* ist die *Aufeinanderfolge von Summanden*. Diese Summanden nennt man *Glieder* der Reihe. Die *Bildung* und *Anordnung* der Glieder muſs eine *gesetzmäſsige* sein. Besteht das Gesetz der Reihe in der Bestimmung:

Jedes Glied der Reihe entsteht aus dem vorhergehenden durch Addition derselben Zahl d,

so heiſst die Reihe eine *arithmetische*.

Jede arithmetische Reihe läſst sich in der Form darstellen:

$$S = \overset{1}{a} + (a \overset{2}{+} d) + (a \overset{3}{+} 2\,d) + (a + \overset{4}{3}\,d) + \cdots\cdots + (a + [\overset{n}{n} - 1]\,d). \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Bezeichnet man das letzte Glied mit t, so ist

$$t = a + (n - 1)\,d. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Demnach kann man vom letzten Gliede ausgehend die obige Reihe auch schreiben:

$$S = \overset{1}{t} + (t \overset{2}{-} d) + (t \overset{3}{-} 2\,d) + (t \overset{4}{-} 3\,d) + \cdots\cdots + (t - [\overset{n}{n} - 1]\,d). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Addiert man (100) und (102), so folgt:

$$2\,S = (a \overset{1}{+} t) + (a \overset{2}{+} t) + (a \overset{3}{+} t) + \cdots + (a \overset{n}{+} t)$$

oder

$$S = \frac{n\,(a + t)}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Da zwischen den fünf Gröſsen a, d, n, S, t nur die Gleichungen (101) und (103) bestehen, so müssen drei derselben gegeben sein. So entstehen zehn Gleichungen, welche sämtlich vom Lernenden zu lösen sind. Als Beispiele dienen:

1. Gegeben d, t, S.

Lösung.

$$a = t - (n - 1)\,d;$$
$$n^2\,d - n\,(2\,t + d) = -\,2\,S.$$

Zahlenbeispiel. $d = 3, t = 10, S = 22.$
Man findet: $n_1 = 4,\ a_1 = 1,$
also die Reihe: $1 + 4 + 7 + 10 = 22.$

Der zweite Wert $n_2 = \frac{11}{3}$ ist zu verwerfen. Er genügt der Endgleichung, aber nicht der Aufgabe.

2. Man bestimme die Summe der durch 19. teilbaren Zahlen zwischen 1000 und 10 000.

Lösung. Man lese $\equiv$ „giebt den Rest". Dann ist:

$$\left.\begin{array}{r} 1000 \equiv 12, \\ 10\,000 \equiv 6 \end{array}\right\} \text{geteilt durch 19.}$$

Also ist 1007 die erste, 9994 die letzte der in Betracht kommenden Zahlen, also $a = 1007$, $t = 9994$; ferner $d = 19$. Nun folgt:

$$n = 474,\ S = 237 \cdot 11\,001 = 2\,607\,237.$$

3. Man bestimme die Strecke, welche ein frei fallender Körper im luftleeren Raume in t Sekunden durcheilt.

Lösung. Am Ende der ersten Sekunde möge der Körper die Geschwindigkeit g erreicht haben. Dann hat er am Ende der Zeit x die Geschwindigkeit xg. Nun teilen wir die Fallzeit t in n gleiche Teile, die wir Augenblicke nennen wollen. Jeder Augenblick dauert $\frac{t}{n}$ Sekunden. Nehmen wir nun an, der Körper bewege sich während jedes Augenblicks mit gleichförmiger Geschwindigkeit, und zwar erstens mit derjenigen Geschwindigkeit, die er zu Anfang dieses Augenblicks hatte: dann erhalten wir ein zu kleines Ergebnis; oder zweitens mit derjenigen Geschwindigkeit, welche er am Ende dieses Augenblicks hatte: dann wird das Ergebnis gröfser als der wirkliche Fallraum. So erhalten wir für den m^{ten} Augenblick als Fallraum

$$\frac{t}{n} \cdot \frac{m-1}{n} \cdot tg \text{ oder } \frac{t}{n} \cdot \frac{m}{n}\, tg.$$

Der Gesamtfallraum wird also:

$$s_1 = \frac{t^2}{n^2} g\,(0 + 1 + 2 + \cdots + [n-1])$$

oder $$s_2 = \frac{t^2}{n^2} g\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

Demnach wird $$s_1 = \frac{1}{2} t^2 g \left(1 - \frac{1}{n}\right);\ s_2 = \frac{1}{2} t^2 g \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Nimmt man $n = \infty$, so folgt:

$$s = \frac{1}{2} t^2 g. \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

Durch Anwendung ähnlicher Schlüsse zeigt man, dafs der Inhalt eines Dreiecks durch die Formel $I = \frac{1}{2} gh$ bestimmt wird (g Grundlinie, h Höhe). Man zieht in gleichem Abstande $\frac{h}{n}$ Parallelen zur Grundlinie und behandelt die entstandenen Streifen als Rechtecke.

Anmerkung. Die Reihe der Kuben ist eine Reihe höherer Ordnung.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1, & & 8, & & 27, & & 64, & & 125, & & 216 \\ & 7, & & 19, & & 37, & & 61, & & 91 & \\ & & 12, & & 18, & & 24, & & 30 & & \\ & & & 6, & & 6, & & 6. & & & \end{array}$$

Bildet man die Differenzen der Glieder, dann die Differenzen der Differenzen u. s. w., so findet man, dafs erst die dritten Differenzen gleich werden. Man unterscheidet Reihen n^{ter} Ordnung als solche, deren n^{te} Differenzen gleich werden. Wir führen nur einige Sätze an, die man leicht durch vollständige Induktion beweist. (Vgl. des Verfassers „100 Aufgaben" S. 112 und unten § 25.)

$$\left.\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \\ 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}; \\ \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

§ 22. Geometrische Reihen.

Eine geometrische Reihe entsteht dadurch, dafs jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit einer bestimmten Zahl q erhalten wird. Sie wird also allgemein dargestellt wie folgt:

$$S = \overbrace{a}^{1} + \overbrace{aq}^{2} + \overbrace{aq^2}^{3} + \overbrace{aq^3}^{4} + \cdots + \overbrace{aq^{n-1}}^{n}. \quad (106)$$

Bezeichnen wir das letzte Glied durch t, so wird:

$$t = aq^{n-1}. \quad \ldots \ldots \quad (107)$$

Multiplizieren wir Gl. (106) mit q und subtrahieren, so folgt:

$$Sq - S = aq^n - a,$$

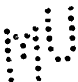
also:

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad \ldots \ldots \quad (108)$$

Vergleichen wir (108) mit (106), so folgt die identische Gleichung (Formel):

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}. \quad (109)$$

Wenn wir die fünf Gröfsen und die unter denselben bestehenden zwei Gleichungen ins Auge fassen, so erhalten wir zehn Grundaufgaben.



1. Sind a, q, S gegeben, also n, t unbekannt, so erhält man:

$$q^n = \frac{(q-1)\,S}{a} + 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Ist q und die rechte Seite dieser Gleichung positiv, so findet man für n einen einzigen reellen Wert. Indem wir die unzähligen übrigen Lösungen dieser nicht algebraischen, sondern transcendenten Gleichung vernachlässigen, finden wir:

$$n \log q = \log \left[\frac{(q-1)\,S}{a} + 1\right].$$

Zu ähnlichen oder noch einfachern Ergebnissen gelangt man bei denjenigen Aufgaben, in welchen unbekannt:

$$a,\ t;\ a,\ S;\ q,\ n;\ q,\ S;\ n,\ t;\ n,\ S;\ t,\ S.$$

2. Ist a, q unbekannt, so erhält man die Gleichung n^{ten} Grades:

$$q^n\left(1 - \frac{t}{S}\right) - q^{n-1} + \frac{t}{S} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

Dieselbe ist eine sogenannte trinomische (aus drei Gliedern bestehende) und hat eine (unbrauchbare) Wurzel $q = 1$. Ihre weitere Theorie gehört der Schulmathematik nicht an.

3. a, n unbekannt. Man erhält aus (111):

$$q \cdot q^n\left(1 - \frac{t}{S}\right) = q^n - q \cdot \frac{t}{S}. \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Hieraus bestimmt man q^n und dann durch Logarithmierung q.

4. q, t unbekannt. Hier erhält man die Gleichung n^{ten} Grades

$$a q^n - S q + S - a = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

Auch diese Gleichung ist trinomisch und besitzt die unbrauchbare Wurzel $q = 1$.

5. Aus (109) folgt:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Wenn wir nun n sehr grofs, $-1 < x < 1$ annehmen, so sinkt x^n zu einem Betrage herab, der nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht. Daher dürfen wir auch setzen:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

Denken wir uns diese Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt, so findet die Gleichheit beider Ausdrücke in unterschiedsloser Weise statt. Solche unendliche Reihen spielen in der Mathematik eine höchst bedeutsame Rolle. Wäre es erforderlich, die ganze unendliche Vielheit ihrer Glieder zu berechnen, so würde eine solche Reihe sinnlos sein. Daher mufs es möglich sein, sich bei den unendlichen Reihen auf eine gewisse Anzahl Glieder zu beschränken. Dies ist der Fall, wenn in einer geordneten Reihe von

einem gewissen Gliede ab die Summe aller übrigen, positiv genommen, unter einen beliebigen noch so kleinen Zahlenwert herabsinkt.

Aufgabe. Wieviel Glieder müfste man berechnen, wenn in (114) $x = \frac{11}{12}$ und Übereinstimmung auf 7 Decimalstellen gefordert würde?

Lösung. Es mufs sein

$$\frac{x^n}{1-x} < 0{,}0000001;\ x^n < \frac{1}{12 \cdot 10^7};$$

$$n > \frac{7 + \log 12}{\log 12 - \log 11}.$$

Man findet $n \gtreqless 183$. Die Reihe wäre also in diesem Falle ohne jeden praktischen Wert.

6. Man kann die Reihe 114 benutzen, um einen periodischen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln. Bezüglich der entgegengesetzten Verwandlung bemerken wir:

Sei p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl; es sei $10^n - 1$ durch p teilbar[1] und $10^n - 1 = \alpha p$; dann erweitern wir den Bruch $\frac{m}{p}$ mit α und finden:

$$\frac{m}{p} = \frac{\alpha m}{10^n - 1} = \alpha m \frac{10^{-n}}{1 - 10^{-n}} = \alpha m\,(10^{-n} + 10^{-2n} + \cdots)$$

Wir erhalten also einen periodischen Decimalbruch, und zwar einen solchen mit n Stellen, wenn 10^n die kleinste derartige Potenz ist, dafs $10^n - 1$ durch p teilbar wird.

Man bemerke:

$10^1 - 1 = 3^2$; $\quad 10^4 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$;
$10^2 - 1 = 3^2 \cdot 11$; $\quad 10^5 - 1 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$;
$10^3 - 1 = 3^3 \cdot 37$; $\quad 10^6 - 1 = 3^3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$.

Hiernach liefert $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{9}$ eine einstellige, $\frac{1}{11}$ eine zweistellige, $\frac{1}{271}$ eine fünfstellige Periode u. s. w.

Weil 1001 durch 7 und 13 teilbar ist, liefert jede 3stellige Zahl zweimal nebeneinanderstehend eine 6stellige durch 7 und 13 teilbare Zahl. — Die Zerlegung der Zahlen $10^n - 1$ in Primfaktoren ist eine sehr interessante und nützliche Übung. Es mag aber an den Satz erinnert werden, dafs man bis $\sqrt{N}$ alle Primzahlen durchprobieren mufs, ehe man sicher sein kann, dafs N keinen Teiler besitzt, also selbst Primzahl ist. Um zu erkennen,

[1] Eine solche Zahl n ist, wie sich zeigen läfst, immer angebbar.

dafs 271 Primzahl ist, mufs man sich überzeugen, dafs 271 nicht teilbar ist durch alle Primzahlen unter $\sqrt{271}$.

Die geometrischen Reihen höherer Ordnung, wie die folgende:

$$1,\ h^2,\ h^6,\ h^{12},\ h^{20} \ldots\ldots \text{Glieder der Reihe},$$
$$h^2,\ h^4,\ h^6,\ h^8 \ldots\ldots \text{erste Quotienten},$$
$$h^2,\ h^2,\ h^2 \ldots\ldots \text{zweite Quotienten},$$

kann die Schulmathematik ganz unbeachtet lassen.

§ 23. Anwendung auf Zinseszinsrechnung.

Zinsen sind Pacht für geliehenes Geld (Kapital). Ein Kapital trägt 4 Prozent (4%) Zinsen, soll heifsen: je 100 ℳ bringen 4 ℳ jährlich Zinsen. Bei manchen Geldinstituten, z. B. bei den Sparkassen ist nun die Bestimmung getroffen, dafs nicht abgehobene Zinsen zum Kapitale hinzugefügt und weiter verzinst werden. Hiernach stellen wir die ***Aufgabe:***

Jemand legt bei einer Sparkasse a ℳ zinsbar an. Wie hoch beläuft sich seine Forderung am Ende des n^{ten} Jahres, wenn er niemals die Zinsen abgeholt hat und die Sparkasse Einlagen mit z Prozent verzinst?

Lösung. Am Ende des ersten Jahres beträgt das Guthaben:

$$a\left(1 + \frac{z}{100}\right) = ap.$$

Die Zahl p ist unabhängig vom Kapital a und einzig abhängig vom Zinsfufse z. Daher wird das Guthaben am Ende des zweiten Jahres, indem für a jetzt ap eintritt, ap^2 sein. Hieraus folgt, dafs am Ende des n^{ten} Jahres die Forderung S die Gröfse besitzt:

$$S = ap^n. \quad \ldots\ldots \quad (115)$$

Da in dieser Gleichung vier Gröfsen vorkommen, so führt sie zu vier verschiedenen, in logarithmischer Ausführung leichten Aufgaben.

Aufgabe. In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei der Zinseszinsbehandlung?

Lösung. Hier soll $S = 2a$ sein, daher nach (115)

$$2 = p^n;\ n = \frac{\log 2}{\log p}. \quad \ldots\ldots \quad (116)$$

Erhebt man die erstere (116) in die 10te Potenz, so folgt:

$$2^{10} = p^{10n} = 1024.$$

Daher wird ein Kapital bei Zinseszinsbehandlung sich in $10n$ Jahren mehr als vertausendfachen. Die Sparkasse setzt dieselbe nur eine bestimmte Anzahl (30) Jahre fort.

Die Zunahme eines Waldbestandes, die Vermehrung der Bevölkerung eines Landes u. s. w. vollzieht sich nach ähnlichen Gesetzen

wie die Vermehrung eines Kapitals durch Zinseszinsbehandlung. Man kann daher auf einschlägige Fragen die Formel (115) anwenden, doch nicht ohne gewisse Einschränkungen, auf welche hier nicht eingegangen werden soll.

Aufgabe. Jemand leiht a ℳ von einer Sparkasse zu $z\,^0/_0$, zahlt aber, um seine Schuld zu tilgen, nicht $z\,^0/_0$, sondern mehr. Wieviel hat er zu zahlen, wenn die Tilgung am Ende des n^{ten} Jahres erfolgt sein soll?

Lösung. Die Sparkasse zahlt einmal a ℳ, der Schuldner zahlt n mal eine gleiche Teilsumme b ℳ. Beide würden von ihrem Gelde den zur Vermehrung desselben geeignetsten Gebrauch gemacht haben, wenn sie es der Zinseszinsbehandlung unterzogen hätten, und zwar zu dem vereinbarten Zinsfuſse z. Damit der Ausgleich ein gerechter sei, muſs am Ende des n^{ten} Jahres der von der Sparkasse auf diese Weise erzielte Geldbetrag gleich sein dem durch die Teilzahlungen des Schuldners hervorgebrachten. Erstern ergiebt Gl. (115). Die erste Teilzahlung des Schuldners dagegen untersteht der Zinseszinsbehandlung $n-1$ Jahre, die zweite $n-2$ Jahre, die vorletzte 1 Jahr, die letzte gar nicht, da sie den Abschluſs herbeiführt. Daher ist der Gesamtwert aller Teilzahlungen:

$$\sigma = bp^{n-1} + bp^{n-2} + \cdots + bp + b = b\,\frac{p^n-1}{p-1}. \quad (117)$$

Also muſs sein
$$ap^n = b\,\frac{p^n-1}{p-1}. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (118)$$

Zahlt der Schuldner nicht z, sondern x Prozent, so zahlt er

für a ℳ
$$b = \frac{a\,x}{100},$$

und dann wird
$$x = \frac{z\,p^n}{p^n-1}.$$

Die Ausführung geschieht nach der folgenden Rechnungsvorschrift:

$$\begin{array}{llll}
\log p = \;; & p^n = \;; & \log z = & \Big\}+ \qquad \log Z = \;\Big\}- \\
n\log p = \;; & p^n - 1 = \;; & n\log p = & \qquad \log(p^n-1) = \\
\hline
 & & \log Z = & \qquad \log\, x = \\
 & & & \qquad x =
\end{array}$$

Da Gleichung (118) vier Gröſsen a, p, b, n enthält, so sind wieder vier Aufgaben möglich, von denen diejenige, welche p als Unbekannte aufstellt, für die Schulmathematik ausfällt.

Aufgabe. Eine Gutsherrschaft hat die Verpflichtung, nach je n Jahren eine gewisse Zahlung von a ℳ zu leisten. Seit der

letzten Zahlung sind m Jahre verflossen. Wieviel hat die Gutsherrschaft zu zahlen, um ihre Verpflichtung für immer abzulösen?

Lösung. Unmittelbar nach der Zahlung der Summe a mufs ein solcher Rest x bleiben, dafs er durch Zinseszinsbehandlung in n Jahren zu dem Betrage $a + x$ anwächst. Daher:

$$x \cdot p^n = a + x.$$

Ist x bestimmt, so folgt als gegenwärtige Ablösungssumme xp^m. Der in p steckende Zinsfufs ist vertragsmäfsig (gesetzlich) zu bestimmen.

§ 24. Die Lehre von den imaginären Gröfsen.

Sind a und b irgendwelche reelle Zahlen, so heifst der Ausdruck $a + bi$ eine komplexe Gröfse, a der reelle, bi der imaginäre Teil, $a^2 + b^2$ die Norm und $\sqrt{a^2 + b^2}$, positiv genommen, der absolute Betrag der komplexen Gröfse.

1. Lehrsatz. Sind zwei komplexe Gröfsen einander gleich, so ist der reelle Teil gleich dem reellen, der imaginäre gleich dem imaginären.

Beweis. Ist $a + bi = c + di,$
so ist auch $a - c = (d - b)i.$
Wird quadriert, so folgt:

$$(a - c)^2 = -(d - b)^2$$

oder $$(a - c)^2 + (d - b)^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Die Summe zweier positiven Gröfsen kann aber nur dann null sein, wenn jede derselben für sich null ist. Also $a = c$, $d = b$.

2. Lehrsatz. Die Summe der absoluten Beträge von zwei komplexen Gröfsen ist gröfser als der absolute Betrag der Summe.

Beweis. Die komplexen Gröfsen seien $a + bi$ und $c + di$. Dann wird behauptet, es sei

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} > \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}. \quad (120)$$

Dies wäre richtig, wenn nach geschehener Quadrierung und Subtraktion gleicher Gröfsen dieselbe Ungleichheit bestehen bliebe, oder wenn wäre $\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} > ac + bd$.

Das wäre wiederum richtig, wenn wäre

$$a^2d^2 + b^2c^2 > 2acbd$$

oder wenn $$(ad - bc)^2 > 0$$

wäre, was sicher der Fall ist. Hiermit ist die Ungleichung (120) bewiesen.

Zahlenbeispiel. $3 + 4i$ und $5 + 12i$. Die Summe der absoluten Beträge ist $5 + 13 = 18$, der absolute Betrag der Summe ist $8\sqrt{5} = \sqrt{320}$. Ist $ad = bc$ oder

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

so geht (120) in eine Gleichung über. Der Satz gilt, da er für zwei Summanden bewiesen ist, sofort für eine beliebige Anzahl von Summanden.

3. Lehrsatz. Ein Produkt aus komplexen Gröfsen ist nur dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist. (Viertes Multiplikationsgesetz.)

Beweis. Aus der Annahme $(a + bi)(c + di) = 0$ folgt nach dem ersten Lehrsatze $ac - bd = 0$ und $ad + bc = 0$, also $abc = b^2 d = -a^2 d;\ abd = a^2 c = -b^2 c.$
Daher ist $(a^2 + b^2)\, d = 0;\ (a^2 + b^2)\, c = 0.$
Diese beiden Gleichungen können nur zusammen bestehen, wenn entweder $a = 0$ und $b = 0$ oder wenn $c = 0$ und $d = 0$ ist, d. h. wenn entweder $a + bi = 0$ oder $c + di = 0$ ist, was zu beweisen war.

Als Haupteigenschaft der komplexen Gröfsen müssen wir diejenige bezeichnen, dafs dieselben bei algebraischer Behandlung immer wieder eine komplexe Gröfse als Endergebnis zeigen. Denn mit dieser Eigenschaft steht es im innigsten Zusammenhange, dafs der Begriff einer „unmöglichen" Lösung nach Einführung der komplexen Gröfsen aus der Algebra verschwindet. Jede Gleichung n^{ten} Grades hat n Wurzeln: dies ist der Hauptlehrsatz der Algebra, den die Schulmathematik freilich nicht zu beweisen hat.

4. Lehrsatz. Die Division zweier komplexen Gröfsen ergiebt eine komplexe Gröfse als Quotienten. Denn es ist:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\, i}{c^2 + d^2}. \quad (121)$$

$c - di$ und $c + di$ heifsen konjugierte Gröfsen.

5. Lehrsatz. Die Quadratwurzel aus einer komplexen Gröfse ist eine komplexe Gröfse. Sei

$$\sqrt{a + bi} = x + yi, \quad \ldots\ldots \quad (122)$$

dann folgt $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$ (1. Lehrsatz), also $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, und zwar positiv genommen. Hiernach folgt:

$$2x^2 = \sqrt{a^2 + b^2} + a,\quad 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a.$$

Demnach sind x und y reell, da ihre doppelten Quadrate positiv sind. Die Vorzeichenzuordnung für x und y bestimmt die Gleichung: $2xy = b.$

Übungen.

$$\sqrt{7+12i};\ \sqrt{-3+4i};\ \sqrt{45-28i};\ \sqrt{-11-60i}.$$

$$\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}};\ \sqrt{-i};\ \sqrt[4]{i};\ \sqrt[4]{-81}.$$

$$x^4+6x^2=-25;\ x^4-10x^2=-169;\ x^8+14x^4=-625.$$

6. Lehrsatz. Jede komplexe Gröſse kann in die Form gebracht werden (Normalform):

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad .\ .\ .\ (123)$$

wo r positiv ist. Denn $r\cos\varphi=a$, $r\sin\varphi=b$,

also: $$r^2=a^2+b^2,\ \cos\varphi=\frac{a}{r},\ \sin\varphi=\frac{b}{r}.$$

Somit ist φ immer bestimmbar und durchwandert, je nach den Vorzeichen der Gröſsen a, b alle Werte von 0^0 bis 360^0. Man erinnere sich dabei der Formeln: $\cos(180^0+\varphi)=-\cos\varphi$, $\sin(180^0+\varphi)=-\sin\varphi$, $\cos(180^0-\varphi)=-\cos\varphi$, $\sin(180^0-\varphi)=\sin\varphi$; $\cos(360^0-\varphi)=\cos\varphi$, $\sin(360^0-\varphi)=-\sin\varphi$.

Übungen. Man gebe den komplexen Zahlen $-1+2i$, $3+2i$, $1-4i$, $-5+6i$, $-7-2i$ die Normalform.

Anleitung für $-1+2i$. Der Kosinus des Winkels φ ist negativ, der Sinus positiv, also liegt φ im zweiten Quadranten. Sei $\varphi=180-\alpha$. Dann wird für den spitzen Winkel α gefunden $tg\,\alpha=2$; $\alpha=63^0\,26',1$.

7. Lehrsatz. Man beweist durch Ausrechnung nach den Additionstheoremen:

$$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta).\ (124)$$

Hieraus folgt durch die Annahme $\alpha=\beta$:

$$\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2,$$

und wenn man wieder mit $\cos\alpha+i\sin\alpha$ multipliziert, mit Hülfe von (124): $\cos(3\alpha)+i\sin(3\alpha)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3$.

Allgemein beweist man für jedes ganzzahlige n durch vollständige Induktion den Moivreschen (spr. Meuwr) Lehrsatz:

$$\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n.\ .\ (125)$$

8. Lehrsatz. Ist $r=\sqrt{a^2+b^2}$ und $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so zeigt man leicht, daſs

$$x=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\quad .\ .\ .\ (126)$$

eine Lösung der Gleichung ist: $x^n=a+bi$. . . . . (127)

Unter $\sqrt[n]{r}$ verstehen wir in (126) lediglich den positiven Wert dieses Ausdrucks. Die übrigen Wurzeln der Gleichung (127) erhält man als

$$x = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360\,m}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360\,m}{n}\right)\right], \quad (128)$$

wo m irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Passende Übungen liefert besonders die Gleichung $x^n = 1$.

Weil mit Hülfe der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln die Gleichung (127) sehr einfach gelöst, also die allgemeinste Aufgabe der Radikation sofort erledigt werden kann, so erhält durch die Lehre von den imaginären Gröfsen die Algebra einen befriedigenden Abschlufs. Demgemäfs gelten Gleichungen, welche auf die Aufgabe (127) zurückführbar sind, als algebraisch lösbar. Schon die allgemeine Gleichung fünften Grades entzieht sich jedoch dieser Zurückführbarkeit.

Auch die imaginären und komplexen Gröfsen lassen sich, wie Gaufs gezeigt hat, anschaulich darstellen.

§ 25. Der binomische Lehrsatz.

Wenn man das „Binom" $a + b$ zu verschiedenen Potenzen erhebt und die dabei auftretenden Zahlenkoefficienten aufschreibt, so erhält man eine (Pascalsche) Tafel folgender Gestalt:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1 u. s. w.

Die Ableitung jeder wagerechten Reihe aus der vorhergehenden ist einfach. In den schrägen Reihen zeigen sich die Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .
1, 3, 6, 10, 15, 21 . . .
1, 4, 10, 20, 35, 56 u. s. w.

und die Gesetze:

$1 + 2 = 3,\; 1 + 2 + 3 = 6,\; 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$
$1 + 3 = 4,\; 1 + 3 + 6 = 10,\; 1 + 3 + 6 + 10 = 20,$
$1 + 4 = 5,\; 1 + 4 + 10 = 15,\; 1 + 4 + 10 + 20 = 35$ u. s. w.

Das Wesen und die Grundlage dieser Erscheinungen bildet der binomische Lehrsatz, den wir kurz folgendermafsen ausdrücken:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots \quad (129)$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-h+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots h} \cdot x^h.$$

Multipliziert man (129) beiderseits mit $1 + x$, so erhält man links $(1 + x)^{n+1}$ und rechts als Koefficienten von x^h die Summe der Koefficienten von x^h und x^{h-1}, also

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{1\cdot 2\cdots h} + \frac{n(n-1)\cdots(n-h+2)}{1\cdot 2\cdots(h-1)}$$

oder
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-h+2)}{1\cdot 2\cdots(h-1)}\left(1 + \frac{n-h+1}{h}\right).$$

Dies ist nichts anderes als:

$$\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\cdots(n-h+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}.$$

Nun erhält man aber diesen Ausdruck als Koefficienten von x^h in (129), wenn man nur für n einsetzt $n + 1$. Ist also (129) für die Zahl n richtig, so ist sie auch richtig für $n + 1$. Für $n = 2$ ist aber Gl. (129) richtig, folglich auch für $n + 1$, also für 3. Nun gilt (129) für $n = 3$, also nach Obigem auch für $n + 1$ oder für 4. Dieser Kettenschlufs (vollständige Induktion) setzt sich ins Unendliche fort, und somit ist der Satz (129) für jede ganze positive Zahl n bewiesen.

Als Anwendung diene zur Auflösung der Gleichung $x^3 = 2$ die Berechnung von $(1 - x)^n$, wo n möglichst grofs, etwa $n = 20$ genommen werde.

1. Ersetzt man in (129) x durch $\frac{a}{b}$, so erhält man:

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n. \quad (130)$$

Denn es ist dann $(1 + x)^n = \frac{(a+b)^n}{b^n}$. Multipliziert man also mit b^n, so folgt (130). Ersetzt man b durch $-b$, so erhält man eine Formel für $(a - b)^n$. Zur Anwendung berechne man $(x - 2)^{12}$, wenn $x^2 = 6$ ist.

2. Die Koefficienten der Reihe (129) sind ihrer Natur nach ganze Zahlen. Nun läfst sich der Satz beweisen (s. u. § 27): Ist keine der ganzen Zahlen a und b durch die Primzahl p teilbar, so ist auch das Produkt ab nicht durch p teilbar. Daher kann, wenn $(1 + x)^p$ entwickelt wird, in keinem der Koefficienten der auftretende Faktor p gegen den Nenner wegfallen. Also ist $(1 + x)^p - 1 - x^p$ immer durch p teilbar. Durch vollständige Induktion leitet man hieraus ab, dafs $a^p - a$ immer durch p teilbar ist, und hieraus folgt, dafs $a^{p-1} - 1$ immer den Faktor p enthält. (Lehrsatz des Fermat.)

3. Multipliziert man $(1 + x)^m$ und $(1 + x)^n$ nach Entwicklung von (129) miteinander, so findet man als Koefficienten von x^2

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + mn + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}. \quad (131)$$

Zur Übung bestimme man den Koefficienten von x^3, x^4 u. s. w.

Das Ergebnis läfst sich jedesmal voraussehen. Ebenso bestimme man die Koefficienten von x und x^2 in dem Produkte

$$(1 + x)^m \cdot (1 + x)^n \cdot (1 + x)^p \text{ u. s. w.}$$

Ebenso bestimme man die Koefficienten von x^2, x^4, x^6 u. s. w. in dem Produkte: $(1 + x)^m \cdot (1 - x)^m$.

4. Die geschickte Benutzung und weitere Ausführung der unter 3 angegebenen Gedanken ermöglicht es, den binomischen Lehrsatz auch auf negative, gebrochene, ja auf komplexe Werte der Exponenten auszudehnen. Da aber in allen diesen Fällen (129) eine unendliche Reihe wird, so ist sehr genau die Konvergenzbedingung zu beachten. Die Schulmathematik mufs auf eine strenge Behandlung dieser Fälle verzichten.

5. Setzen wir in (129) $n = -1$, so folgt eine Reihe, die mit (114) übereinkommt. Für $n = -2$ wird

$$(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \qquad (132)$$

Multiplizieren wir rechts und links mit $1 + 2x + x^2$, so bleibt rechts nur 1 übrig, alle sonstigen Glieder heben sich auf. Dennoch würde es ein Irrtum sein, wollte man annehmen, dafs (132) für beliebige Werte von x Geltung habe. Nur wenn $(x) < 1$, wo (x) den absoluten Betrag von x bedeutet, ist (132) ohne weitere Einschränkung gültig. Dieselben Bemerkungen machen wir, wenn n irgend eine negative ganze Zahl bedeutet. Zur Übung berechne man den Koefficienten von x^7 in dem Produkte

$$(1 + x)^{-3} \cdot (1 + x)^{-5} \text{ u. s. w.}$$

6. Ist der Exponent eine gebrochene Zahl, so gelten ähnliche Bemerkungen. Es ist

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (133)$$

Bricht man beim dritten Gliede ab und quadriert, so wird:

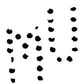
$$1 + x = 1 + x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4,$$

was also nur dann annähernd wahr ist, wenn x klein genug ist. Indes kann man (133) benutzen, um aus Zahlen die Quadratwurzel zu ziehen. Sei $A = a^2 + b$, wo a^2 die A nächste Quadratzahl, also b positiv oder negativ ist, dann wird

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a\sqrt{1 + \frac{b}{a^2}}.$$

Nun ist (133) mit Nutzen anwendbar. Ebenso findet man für die Kubikwurzel, wenn $A = a^3 + b$ ist:

$$\sqrt[3]{A} = a\sqrt[3]{1 + \frac{b}{a^3}} = a + \frac{1}{3}\frac{b}{a^2} - \frac{1}{9}\frac{b^2}{a^5} + \cdots$$



Soll z. B. $\sqrt[3]{7}$ berechnet werden, so finden wir logarithmisch:

$$a = 1{,}913,$$

daher $a^2 = 3{,}659569, \; a^3 = 7{,}000755497.$

Folglich ist $b = -\,0{,}000755497,$

mithin $\frac{b}{3a^2} = -\,0{,}000068815.$

Also: $\sqrt[3]{7} = 1{,}912931185.$

Dies ist bis auf neun Stellen richtig, wie die mit fünfstelligen Tafeln auszuführende Berechnung des folgenden Gliedes $\frac{b^2}{9a^5}$ zeigt.

7. Man beachte, dafs (133) links zweiwertig, rechts dagegen eindeutig ist. Die Lösung dieser Fragen gehört in die Reihentheorie. Mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes kann man einfache Ableitungen der Exponential- und logarithmischen Reihen geben. (Vgl. d. Verf. „100 Aufgaben", Anhang.)

8. Betrachtet man das aus n Faktoren $1 + ax$, $1 + bx$, $1 + cx$ u. s. w. gebildete Produkt und ordnet nach steigenden Potenzen von x, so entstehen als Koefficienten der einzelnen Potenzen gewisse Bildungen aus den n Gröfsen $a, b, c, \ldots$, welche man Kombinationen derselben nennt. Der Koefficient von x^h enthält die Kombinationen h^{ter} Klasse. Ihre Anzahl ergiebt sich durch die Annahme $a = b = c = \ldots = 1$ mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes. — Eine andere Gattung von Kombinationen geht aus dem Produkte

$$\frac{1}{1-ax} \cdot \frac{1}{1-bx} \cdot \frac{1}{1-cx} \cdots (n \text{ Faktoren})$$

hervor, wenn man jeden Faktor in eine Reihe (114) entwickelt und dann die Reihen multipliziert. Auch hier erhält man die Anzahl der Kombinationen jeder Klasse mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes durch obige Annahme.

§ 26. Gleichungen höheren Grades.

Wir haben uns mit den Gleichungen wiederholt beschäftigt und Gleichungen ersten und zweiten Grades lösen gelernt. Hiermit ist für die Schulmathematik ein passender Abschlufs gewonnen; denn man kann zeigen, dafs die Lösung der genannten Aufgaben sich so weit erstreckt wie die Lösung geometrischer Aufgaben durch Kreis und gerade Linie, durch Zirkel und Lineal. Nicht jedesmal führt eine durch die genannten Hülfsmittel lösbare geometrische Aufgabe bei algebraischer Behandlung sofort

auf eine Gleichung zweiten Grades. Vielmehr kann der Grad der Endgleichung sehr hoch sein. Aber dann ist es immer möglich, die Lösung der Gleichung auf die Lösung mehrerer quadratischen Gleichungen zurückzuführen.

Über die höhern Gleichungen selbst bemerken wir folgendes:

1. Lehrsatz. Wenn der Ausdruck

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n \quad . \quad (134)$$

für $x = \alpha$ null wird, so ist die rechte Seite der Gleichung (134) durch $x - \alpha$ teilbar.

Beweis. Nach unserer Voraussetzung ist:

$$0 = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots\cdot + a_n,$$

daher auch:

$$y = x^n - \alpha^n + a_1 (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdot\cdot + a_{n-1} (x - \alpha). \quad (135)$$

Nun ist aber nach der Lehre von den geometrischen Reihen:

$$x^m - \alpha^m = (x - \alpha)(x^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \alpha^2 x^{m-3} + \cdots + \alpha^{m-1}).$$

Folglich scheidet sich bei allen Gliedern der rechten Seite von (135) ein Faktor $x - \alpha$ ab. Setzt man denselben heraus, so tritt in die Klammer ein Ausdruck $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades. Also wird:

$$y = (x - \alpha)(x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}), \quad (136)$$

was zu beweisen war.

Hat eine Gleichung wie (134) die Eigenschaft, dafs ihre rechte Seite null wird für $x = \alpha$ und $x = \beta$, so kann nach (136) und Lehrsatz 3 S. 66 dies nur dadurch geschehen, dafs der Faktor $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades für $x = \beta$ verschwindet. Wendet man also nun dieselben Schlüsse an, so ergiebt sich, dafs die rechte Seite von (134) in diesem Falle durch $(x - \alpha)(x - \beta)$ teilbar sein mufs. In dieser Weise kann man fortfahren. Hat man für einen Ausdruck n^{ten} Grades genau n Werte, für welche er verschwindet, etwa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha^n$, so ergiebt sich die identische Gleichung:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n =$$
$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n). \quad . \quad . \quad (137)$$

Da nun die rechte Seite für keinen andern Wert als für die n Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ verschwindet, so ergiebt sich der wichtige

2. Lehrsatz: Eine Gleichung n^{ten} Grades kann nicht mehr als n Wurzeln besitzen.

Zur Übung bildet man Gleichungen 3ten, 4ten Grades, welche gegebene Wurzeln besitzen. Ferner bildet man Gleichungen 3ten

Grades, welche eine, Gleichungen 4ten Grades, welche zwei ganzzahlige Wurzeln haben, und zerlegt die Gleichung nach der Formel (137). So hat die Gleichung

$$(x+1)(x+2)(x+3) - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) = 0 \quad (138)$$

die Wurzel $x = \alpha - 1$. Man bestimme die beiden andern.

3. ***Aufgabe.*** Einen gegebenen Ausdruck n^{ten} Grades durch einen gegebenen Ausdruck m^{ten} Grades zu dividieren; $n > m$.

Lösung. Ordnet man beide Ausdrücke nach fallenden Potenzen von x, so erkennt man, dafs der Quotient, wenn die Aufgabe überhaupt lösbar sein soll, ein Ausdruck $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades ist; daher der Ansatz:

$$\begin{aligned} &x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots + a_n \\ &= (x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_m) \\ &\cdot (x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + c_2 x^{n-m-2} + \cdots + c_{n-m}). \quad (139) \end{aligned}$$

Vergleicht man die Koefficienten der gleichen Potenzen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_1 + c_1, \\ a_2 &= b_2 + b_1 c_1 + c_2, \\ a_3 &= b_3 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + c_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (140)$$

Die Gleichungen bestimmen die c eindeutig. Dafs diese Bestimmung die einzig mögliche ist, folgt aus dem Lehrsatze 2; denn Gleichung (139) soll für jeden Wert von x richtig sein. Dies wäre nicht möglich und nur für höchstens n Werte zu erreichen, wenn nicht jeder Koefficient in der geordneten Gleichung (139) verschwände. — Die Gleichungen (140) bilden ein System von n Bestimmungen unter den $n - m$ Unbekannten $c_1, c_2, \ldots c_{n-m}$. Daher ist die Aufgabe überbestimmt und nicht allgemein lösbar. Dagegen ist es immer möglich, den Quotienten $\frac{P}{Q}$, wo P ein Ausdruck n^{ten}, Q ein solcher m^{ten} Grades ist, in die Form zu setzen:

$$\frac{P}{Q} = R + \frac{S}{Q}, \quad \ldots\ldots \quad (141)$$

wo R vom $(n-m)^{\text{ten}}$ und S vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Derartige Ausdrücke nennt man ganze Funktionen von x, also:

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n. \quad (142)$$

Gleichungen n^{ten} Grades löst die Schulmathematik durch blofses Probieren, falls ihre Koefficienten gegebene Zahlen sind. — Auf Gleichungen dritten Grades stöfst man in der Stereometrie bei der Körperbestimmung sehr häufig, z. B. wenn man einen Cylinder

berechnen will, dessen Inhalt gegeben und dessen Höhe um eine bestimmte Gröfse den Grundkreisradius übertrifft.

4. Jede Gleichung n^{ten} Grades kann so umgeformt werden, dafs das zweithöchste Glied fehlt. Ist die gegebene Gleichung:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

so setze man $x = y - \frac{a_1}{n}$. Die Richtigkeit ergiebt sich aus dem binomischen Lehrsatz. Die allgemeinste Gleichung dritten Grades kann also die Form annehmen:

$$x^3 + px + q = 0. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (143)$$

Setzen wir $x = y + z$, so folgt:

$$x^3 - 3xyz - y^3 - z^3 = 0.$$

Bestimmen wir also: $-3yz = p, \ -y^3 - z^3 = q$

oder

$$\left.\begin{aligned} y^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}; \\ z^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (144)$$

so erhalten wir die Lösung der Gleichung (143) (Cardanische Formel). Die Ausziehung der Kubikwurzel zur Bestimmung von y ist dreideutig. Ist aber y festgesetzt, so ist z durch die Gleichung $3yz = -p$ ohne alle Mehrdeutigkeit bestimmt. Das Vorzeichen der Quadratwurzel in (144) ist gleichgültig, da y und z vertauschbar sind. Gleichung (143) besitzt also immer 3 und nur 3 Wurzeln. Sind p und q reell, y^3 aber komplex, so mufs auch z^3 komplex, aber infolge der Gleichungen (144) und $-3yz = p$ konjugiert zu y sein. Die Summe $x = y + z$ ist also in diesem Falle reell, und die Gleichung hat drei reelle Wurzeln. Aus der Identität

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad (145)$$

folgt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= -a_1, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 &= a_2, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= -a_3. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (146)$$

Die linken Seiten der Gleichungen (146) nennt man die einfachsten symmetrischen Funktionen der Wurzeln. Jede andere symmetrische Funktion, z. B. $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n$ läfst sich durch dieselben darstellen.

5. Als Beispiele wählen wir:

$$x^3 - 6x + 4 = 0; \ x^3 + 9x - 10 = 0.$$

Für die erste wird $y^3 = -2 + 2i$ und nach dem Moivreschen Satze

$$x_1 = 2, \ x_2 = -1 - \sqrt{3}, \ x_3 = -1 + \sqrt{3}.$$

Für die zweite wird $y^3 = 5 + 2\sqrt{13}$, daher:

$$x_1 = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}.$$

Die wahre Natur der Lösung erkennt man hieraus nicht. Es ist nämlich:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^3 = 5 + 2\sqrt{13}.$$

6. Wenn eine Gleichung zweiten Grades so beschaffen ist, dafs ihre Koefficienten wieder von der Lösung einer Gleichung zweiten Grades abhangen, so können diese Koefficienten nur eine Wurzelgröfse enthalten. Also mufs die Gleichung die Form haben:

$$x^2 + (m + n\sqrt{D})\,x + p + q\sqrt{D} = 0. \quad . \quad (147)$$

Hieraus folgt:

$$(x^2 + mx + p)^2 - D\,(nx + q)^2 = 0. \quad . \quad (148)$$

In diese Form mufs also jede Gleichung vierten Grades gebracht werden können, welche sich auf die Lösung von zwei quadratischen Gleichungen zurückführen läfst. Daher setzen wir:

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = (x^2 + mx + p)^2 - D\,(nx + q)^2.$$

Es mufs also sein:

$$2m = a_1,\; 2p + m^2 - Dn^2 = a_2,\; 2mp - 2Dnq = a_3,$$
$$p^2 - Dq^2 = a_4.$$

Hieraus folgt:

$$Dn^2 = 2p + m^2 - a_2,\; Dq^2 = p^2 - a_4,\; 2Dnq = 2mp - a_3.$$

Daher: $$4\,(2p + m^2 - a_2)\,(p^2 - a_4) = (2mp - a_3)^2. \qquad (149)$$

Da $m = \frac{a_1}{2}$ ist, so bleibt eine Gleichung dritten Grades für p zu lösen. Die von uns aufgeworfene Frage, welche Gleichungen vierten Grades auf zwei quadratische zurückführbar seien, hat also eine ganz andere Beantwortung erhalten. Wir haben nämlich gefunden, dafs jede Gleichung vierten Grades sich mit Hülfe einer Gleichung dritten Grades auflösen läfst.

Entwickelt lautet (149), die Resolvente der Gleichung vierten Grades:

$$8p^3 - 4a_2p^2 - (8a_4 - 2a_1a_3)\,p - a_1^2a_4 + 4a_2a_4$$
$$- a_3^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

Für die reciproken Gleichungen, wo $a_1 = a_3$, $a_4 = 1$, wird $p = 1$, $Dn^2 = 2 + \frac{a_1^2}{4} - a_2$; daher:

$$\left(x^2 + \frac{a_1}{2}\,x + 1\right)^2 = \left(2 + \frac{a_1^2}{4} - a_2\right)x^2.$$

Für $a_1 = a_3 = 0$ wird $p^2 = a_4$ oder $2p = a_2$.

Ist die Gleichung[1] vierten Grades gegeben:

$$a^2x^4 + 4b^2x^3 - 6abx^2 + 4a^2x + b^2 = 0, \quad . \quad (151)$$

so lautet die Resolvente nach leichter Umformung:

$$\left(p + \frac{b}{a}\right)^3 = 2\,\frac{(a^3 + b^3)^2}{a^6}.$$

7. Wir haben oben gesagt, dafs man Gleichungen höhern Grades, deren Koefficienten gegebene Zahlen sind, durch Probieren löst. Selbstverständlich wird man dieses Probieren methodisch vornehmen. Ist also $x = \alpha$ ein angenäherter Wert, so setzt man $x = \alpha + h$ in die Gleichung ein, vernachlässigt die höhern Potenzen h^2, h^3 u. s. w. und bestimmt so die kleine Gröfse h durch eine Gleichung ersten Grades. So erhält man eine zweite Annäherung, von der man dann in derselben Weise zu einer dritten u. s. w. gelangen kann.

Wollen wir z. B. die Gleichung $x^9 = 1$ lösen, welche mit der Konstruktion des regelmäfsigen Neunecks zusammenhängt, so ist:

$$x^9 - 1 = (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) = 0. \quad . \quad (152)$$

Aus $x^6 + x^3 + 1 = 0$ folgt $x^3 + \frac{1}{x^3} + 1 = 0$, und wenn man setzt:

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

$$y^3 - 3y + 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

$$\begin{aligned} y &= -2; & -8 + 6 + 1 &= -1, \\ y &= -1; & -1 + 3 + 1 &= 3, \\ y &= 0; & 0 - 0 + 1 &= 1, \\ y &= 1; & 1 - 3 + 1 &= -1, \\ y &= 2; & 8 - 6 + 1 &= 3. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dafs je ein Wert von y zwischen den Werten -2 und -1; 0 und 1; 1 und 2 liegt. Setzen wir etwa $y = 0{,}5$, so folgt: $\quad 0{,}125 - 1{,}5 + 1 = -0{,}375.$

Für $y = 0{,}4$ wird $\quad 0{,}064 - 1{,}2 + 1 = -0{,}136;$

für $y = 0{,}3$ $\quad 0{,}027 - 0{,}9 + 1 = 0{,}127.$

Demgemäfs setzen wir $\quad y = 0{,}3 + h$

und finden:

$$\begin{aligned} y^3 &= 0{,}027 + 0{,}27h \\ -3y &= -0{,}9 - 3h \\ 1 &= 1 \\ \hline 0 &= 0{,}127 - 2{,}73h; \quad h = 0{,}046. \end{aligned}$$

Daher die zweite Näherung $y = 0{,}346$.

Die dritte wird $y = 0{,}347292 = 2 \cos 80^0$; und dieser Wert ist erst auf der sechsten Stelle ungenau.

[1] Entnommen der Theorie der lemniskatischen Funktionen.

§ 27. Einige Sätze über Teilbarkeit der Zahlen.

1. Sind zwei ganze und positive Zahlen a und b jede durch die ganze Zahl m teilbar, so nennt man m den gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen. Haben zwei ganze Zahlen aufser der Einheit kein gemeinsames Mafs (gemeinsamen Teiler), so nennt man sie relative Primzahlen. Wenn a und b beide durch m teilbar sind, so sind auch $a + b$ und $a - b$, ra, rb, $ra - sb$ durch m teilbar. Denn ist $a = fm$, $b = gm$, so ist: $a + b = m(f + g)$; $(a - b) = m(f - g)$;

$$ra = rfm;\quad ra - sb = m(rf - sg).$$

Also der Quotient bei der Teilung durch m ist in allen diesen Fällen eine ganze Zahl. Denn r, s, f, g u. s. w. sind ganze Zahlen.

2. ***Aufgabe.*** Man bestimme den gröfsten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen a und b.

Lösung. Sei $a > b$ und b in a als Quotient $c$mal enthalten, wobei der Rest d bleibe. Dann ist $d < b$, und es entsteht die Gleichung:

$$a = bc + d. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

Wenn nun a und b den gröfsten gemeinsamen Teiler m haben, so mufs m auch gröfster gemeinsamer Teiler von b und d sein. Hiermit ist die Aufgabe auf eine leichtere zurückgeführt; denn es ist $a > b$ und $b > d$. Fahren wir also fort und bilden der Reihe nach die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= bc + d; \\ b &= dc_1 + e; \\ d &= ec_2 + f; \\ &\cdots\cdots \\ m &= nc_r + p, \end{aligned}$$

so mufs dieses Verfahren einmal schliefsen, und zwar entweder so, dafs p ein genauer Teiler von n ist — dann löst p die Aufgabe —, oder so, dafs $p = 1$ wird — dann sagen wir: a und b sind relative Primzahlen.

Beispiele. $a = 112$, $b = 63$; $a = 37$, $b = 25$;

$$\begin{aligned} 112 &= 1 \cdot 63 + 49, & 37 &= 1 \cdot 25 + 12, \\ 63 &= 1 \cdot 49 + 14, & 25 &= 2 \cdot 12 + 1. \\ 49 &= 3 \cdot 14 + 7. \\ 14 &= 2 \cdot 7. \end{aligned}$$

112 und 63 haben also den gröfsten gemeinsamen Teiler 7, 37 und 25 sind relative Primzahlen.

3. ***Lehrsatz.*** Wenn a und b beide den Primteiler p nicht enthalten, so ist auch das Produkt ab nicht durch p teilbar.

Beweis. Sei $a > p$, so bilden wir die Reihe der Gleichungen:

$$a = m_1 p + c_1;$$
$$p = m_2 c_1 + c_2;$$
$$c_1 = m_3 c_2 + c_3;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$c_n = m_{n+2} \cdot c_{n+1} + 1.$$

Da p eine Primzahl ist, so mufs der Schlufs des Verfahrens so lauten, wie er in der letzten Zeile angegeben ist. Hätte nun ab den Teiler p, so würde durch Multiplikation der vorstehenden Gleichungen mit b folgen, dafs bc_1, bc_2, bc_3 und endlich b selbst den Teiler p hätten, was gegen die Voraussetzung ist.

Gleiches gilt von einem aus mehreren Faktoren bestehenden Produkte.

4. ***Lehrsatz.*** Ist $x^n = a$ und a eine ganze Zahl, x aber nicht, so kann x niemals genau durch einen Bruch dargestellt werden.

Beweis. Angenommen, die Behauptung sei nicht richtig, sondern es sei $x = \frac{p}{q}$. Dann können p und q von allen gemeinsamen Teilern befreit werden, und es würde folgen:

$$p^n = q^n \cdot a. \quad \ldots\ldots \quad (155)$$

Hat nun q den Primteiler α, so hat p denselben nach der Voraussetzung nicht, wohl aber hätte ihn das Produkt p^n, was dem vorigen Satze widerspricht. — Also ist die Lösung der Gleichung $x^n = a$ eine ganze Zahl, oder sie ist irrational.

5. Wenn $a = b + fm$, so schreibt man nach Gaufs:

$$a \equiv b \ (mod\ m). \quad \ldots\ldots \quad (156)$$

und spricht: „a ist kongruent b nach dem Modul m". Für diese Beziehungen, welche man Kongruenzen nennt, gelten ähnliche Rechnungsgesetze wie für Gleichungen. So folgt aus (156):

$$a + c \equiv b + c \ (mod\ m); \ da \equiv db \ (mod\ m);$$

aus $\quad a \equiv b \ (mod\ m)$ und $c \equiv d \ (mod\ m)$

folgt: $$ac \equiv bd \ (mod\ m). \quad \ldots\ldots \quad (157)$$

Die letztere Kongruenz wird folgendermafsen bewiesen. Es ist nach der Voraussetzung

$$a = b + fm, \ c = d + f'm, \text{ daher:}$$
$$ac = bd + m(fd + f'b + ff'm),$$

somit (157) richtig.

Nun hat man:

$$10 \equiv 1 \ (mod\ 9);\ 10^2 \equiv 1 \ (mod\ 9);\ \ldots\ 10^n \equiv 1 \ (mod\ 9).$$

Daher ist jede Zahl des dekadischen Systems ihrer Quersumme nach dem Modul 9 kongruent. Hierauf beruht die Neunerprobe. Denn nach (157) mufs jedes Produkt kongruent sein dem Produkte solcher Zahlen, welche den Faktoren kongruent sind. Also mufs die Quersumme des Produktes, durch 9 geteilt, denselben Rest lassen wie das Produkt der Quersummen der Faktoren.

Beispiel.

$$25 \cdot 23 = 575;$$
$$7 \cdot 5 \equiv 17 \ (mod\ 9).$$

Ebenso ist:

$$10 \equiv -1 \ (mod\ 11);\ 10^2 \equiv 1 \ (mod\ 11);\ 10^3 \equiv -1 \ (mod\ 11) \text{ u. s. w.}$$

Daher:

$$a_0 + 10 a_1 + 100 a_2 + 1000 a_3 + \cdots \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots \ (mod\ 11).$$

Hierauf beruht die Entscheidung, ob eine Zahl durch 11 teilbar sei, und die Elferprobe.

Ist bei der Multiplikation ein Fehler begangen, welcher ein Mehrfaches von 9 ist, so deckt ihn die Neunerprobe nicht auf.

Die genannten beiden Proben sind bei jeder gröfsern Multiplikation anzustellen. Noch gröfser wird die Sicherheit, wenn man die Siebenerprobe folgen läfst. Dieselbe wird am einfachsten durch wirkliche (im Kopfe anzustellende) Division der Faktoren durch 7 und Multiplikation der kleinsten Reste angestellt.

Es ist:

$$10 \equiv 10,\ 10^2 \equiv -11,\ 10^3 \equiv 1,\ 10^4 \equiv 10,\ 10^5 \equiv -11,$$
$$10^6 \equiv 1 \ (mod\ 37).$$

Hieraus folgt ein einfaches Kennzeichen, ob eine Zahl des dekadischen Systems durch 37 teilbar sei.

